目 次

第1章　Retraction

1.1　図式の追跡

1.1.1　圏 O1

1.1.1.1　射の合成

なんらかの圏 $\mathcal{C}$ において，

1. $f \in \hom(A, B)$ であることを

$$A \xrightarrow{f} B\,, \qquad B \xleftarrow{f} A$$

と表しても良いことにする．

2. 射 $A \xrightarrow{f} B$ が与えられたとき，A を f の domain, B を f の codomain と言い，それぞれ $\mathrm{dom}(f)$, $\mathrm{cod}(f)$ と表す．

3. 射の domain, codomain を特定する記号を必要としないときには，

$$\cdot \xrightarrow{f} \cdot\,, \qquad \cdot \xleftarrow{f} \cdot\,, \qquad \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, shift left, "f"] & \cdot \arrow[l, shift left, "g"] \end{tikzcd}$$

といった表記を用いて良いことにする．

4. $f \circ g$ のように記号 $\circ$ を用いている場合には，特に断らなくても，f, g は射であり，f の domain と g の codomain は共通であるとする；

$$\cdot \xrightarrow{g} \cdot \xrightarrow{f} \cdot$$

1.1.1.2　O1 圏

定義 1. 圏 $\mathcal{C}$ が次の条件を満たすとき、$\mathcal{C}$ は **O1** 圏であると言う；
任意の対象 A, B に対して $\hom(A, B)$ は順序関係 $\preceq$ が定めらた順序集合（半順序集合，poset）であり，次の条件（**合成と不等号の両立**）を満たす;

$$
\begin{aligned}
f_1 \preceq f_2 &\implies g \circ f_1 \preceq g \circ f_2, \qquad f_1, f_2 \in \hom(A, B),\ g \in \hom(B, C), \\
f_1 \preceq f_2 &\implies f_1 \circ g \preceq f_2 \circ g, \qquad g \in \hom(A, B),\ f_1, f_2 \in \hom(B, C).
\end{aligned}
$$

この条件から，$f_1 \preceq g_1$, $f_2 \preceq g_2$ ならば

$$
\begin{aligned}
f_1 \circ f_2 &\preceq g_1 \circ f_2 \\
&\preceq g_1 \circ g_2
\end{aligned}
$$

が導かれ，さらに，一般に

$$
f_1 \preceq g_1, \ldots, f_n \preceq g_n \implies f_1 \circ \cdots \circ f_n \preceq g_1 \circ \cdots \circ g_n \tag{1.1}
$$

となる．

1.1.2　不等号の図式の追跡

1.1.2.1　不等号の図式

図式が可換であることは記号 “$\circlearrowleft$” を用いて，例えば

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[l] \arrow[d] \\
C \arrow[r] & D
\end{tikzcd}
$$

と表すのが普通なのだが，これを等号の記号 “=” を用いて

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "="] & B \arrow[l] \arrow[d] \\
C \arrow[r] & D
\end{tikzcd}
$$

と書くことにすると，その類似で不等号の図式

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\preceq"] & B \arrow[l, "p"'] \arrow[d, "g"] \\
C \arrow[r, "i"'] & D
\end{tikzcd}
$$

を考えることができる．これは，$i \circ f \circ p \preceq g$ であることを表す．

可換図式の場合と同様に，**O1** 圏では不等式の図式を追跡することができる．例えば,「小さな四角形での不等号の図式」

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[d, "f_0"'] \arrow[dr, phantom, "\preceq"] & A_1 \arrow[l, "p_0"'] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\preceq"] & A_2 \arrow[l, "p_1"'] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\preceq"] & \cdots \arrow[l] \arrow[dr, phantom, "\preceq"] & A_N \arrow[l, "p_{N-1}"'] \arrow[d, "f_N"] \\ B_0 \arrow[r, "i_1"'] & B_1 \arrow[r, "i_2"'] & B_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "i_N"'] & B_N \end{tikzcd}$$

から，$p_{N,0} = p_0 \circ p_1 \circ \cdots \circ p_{N-1}$, $i_{0,N} = i_N \circ \cdots \circ i_2 \circ i_1$ の作る「大きな四角形での不等号の図式」

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[d, "f_0"'] \arrow[dr, phantom, "\preceq"] & A_N \arrow[l, "p_{N,0}"'] \arrow[d, "f_N"] \\ B_0 \arrow[r, "i_{0,N}"'] & B_N \end{tikzcd}$$

が得られる；実際，

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[d, "f_0"'] \arrow[dr, phantom, "\preceq"] & A_n \arrow[l, "p_{n,0}"'] \arrow[d, "f_n"] \\ B_0 \arrow[r, "i_{0,n}"'] & B_n \end{tikzcd}$$

を帰納法の仮定として，図式

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[d, "f_0"'] \arrow[dr, phantom, "\preceq"] & A_n \arrow[l, "p_{n,0}"'] \arrow[d, "f_n"'] \arrow[dr, phantom, "\preceq"] & A_{n+1} \arrow[l, "p_n"'] \arrow[d, "f_{n+1}"] \\ B_0 \arrow[r, "i_{0,n}"'] & B_n \arrow[r, "i_{n+1}"'] & B_{n+1} \end{tikzcd}$$

から，

$$\begin{aligned} i_{0,n+1} \circ f_0 \circ p_{n+1,0} &= i_{n+1} \circ (i_{0,n} \circ f_0 \circ p_{n,0}) \circ p_n && \text{（帰納法の仮定により}\downarrow\text{）} \\ &\preceq i_{n+1} \circ f_n \circ p_n && \text{（小さな四角形での不等式により}\downarrow\text{）} \\ &\preceq f_{n+1} \end{aligned}$$

が導かれる．

1.1.2.2 用語

retraction，section という用語は，数学の色々な分野で用いられるが，ここでは順序関係の絡んだ独自の用語として，ガロア対，レトラクト対といった用語を定義する．$a \preceq b$ を $b \succeq a$ と書いても良いことにする．

定義 2. O1 圏 $\mathcal{C}$ において，$A \underset{f}{\overset{g}{\rightleftarrows}} B$ が与えられているとする．

1. $g \circ f = \mathrm{id}_A$ であるとき，
   - g を f の**レトラクション** (retraction)，
   - f を g の**セクション** (section)

   と言う．
2. $g \circ f = \mathrm{id}_A$，$f \circ g \preceq \mathrm{id}_B$ であるとき，g, f の対 $\langle g, f \rangle$ をレトラクト対と言う．
3. $g \circ f \succeq \mathrm{id}_A$，$f \circ g \preceq \mathrm{id}_B$ であるとき，g, f の対 $\langle g, f \rangle$ をガロア対と言う．

レトラクト対を扱うことが目標なのだが，まず，一般にガロア対についての成り立つ結果を証明しておく．

1.2 ガロア対

1.2.1 基本的な性質

まず，$A \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} B$ がガロア対ならば，つまり，$p \circ i \succeq \mathrm{id}_A$，$i \circ p \preceq \mathrm{id}_B$ ならば，

$$\begin{aligned} p \circ i \circ p &= p \circ (i \circ p) \\ &\preceq p \circ \mathrm{id}_B = p \\ p \circ i \circ p &= (p \circ i) \circ p \\ &\succeq \mathrm{id}_A \circ p = p \end{aligned}$$

なので

$$p \circ i \circ p = p \tag{1.2}$$

であり（これを導くために，前順序では不十分で poset であることが必要），また，

$$\begin{aligned} i \circ p \circ i &= i \circ (p \circ i) \\ &\succeq i \circ \mathrm{id}_A = i \\ i \circ p \circ i &= (i \circ p) \circ i \\ &\preceq \mathrm{id}_B \circ i = i \end{aligned}$$

なので

$$i \circ p \circ i = i \tag{1.3}$$

が得られる．

1.2.1.1　一意性

補題 1. $f \circ g \preceq \mathrm{id}_B,\ \mathrm{id}_A \preceq g' \circ f'$ となる $f, f' \in \hom(A, B),\ \ g, g' \in \hom(B, A)$ に対して，以下が成り立つ．

1. $g' \preceq g \implies f \preceq f'$.
2. $f' \preceq f \implies g \preceq g'$.

［証明］

1. $g' \preceq g$ ならば，

$$\begin{aligned} f = f \circ \mathrm{id}_A &\preceq f \circ (g' \circ f') \quad (\Leftarrow \mathrm{id}_A \preceq g' \circ f') \\ &\preceq f \circ (g \circ f') \quad (\Leftarrow g' \preceq g) \\ &= (f \circ g) \circ f' \quad (\ f \circ g \preceq \mathrm{id}_B \text{ なので} \downarrow) \\ &\preceq \mathrm{id}_B \circ f' = f'. \end{aligned}$$

2. $f' \preceq f$ ならば，

$$\begin{aligned} g = \mathrm{id}_A \circ g &\preceq (g' \circ f') \circ g \quad (\Leftarrow \mathrm{id}_A \preceq g' \circ f') \\ &\preceq (g' \circ f) \circ g \quad (\Leftarrow f' \preceq f) \\ &= g' \circ (f \circ g) \quad (\ f \circ g \preceq \mathrm{id}_B \quad \text{なので} \downarrow) \\ &\preceq g' \circ \mathrm{id}_B = g'. \end{aligned}$$

□

一時的に用いるだけだが，$A \underset{f}{\overset{g}{\rightleftarrows}} B$ が不等式 $g \circ f \geq \mathrm{id}_A$ を満たすとき，

- g を f の left-up-term,
- f を g の right-up-term,

と言うことにする．

Remark.　ついでに，$f \circ g \leq \mathrm{id}_B$ の場合には，

- f を g の left-down-term,
- g を f の right-down-term

としておけば，$\langle p, i\rangle$ がガロア対ならば，

1. i は，p の right-up-term であり left-down-term,
2. p は，i の left-up-term であり right-down-term

ということになる．

命題 1． $A \underset{i}{\overset{p}{\leftrightarrows}} B$ はガロア対であるとする．したがって，$p \circ i \succeq \mathrm{id}_A$, $i \circ p \preceq \mathrm{id}_B$.

1. (a) i は p の最小の right-up-term.
   (b) p は i の最小の left-up-term.
2. (a) $\langle p, i'\rangle$ もガロア対ならば，$i = i'$.
   (b) $\langle p', i\rangle$ もガロア対ならば，$p = p'$.
3. $A \underset{i'}{\overset{p'}{\leftrightarrows}} B$ もガロア対であるとする．このとき，
   (a) $p' \preceq p, \implies i \preceq i'$.
   (b) $i' \preceq i \implies p \preceq p'$.

［証明］

1. $\langle p, i\rangle$ はガロア対なので，特に，$i \circ p \preceq \mathrm{id}_B$ であり，$f = i, g = p$ と置くと $f \circ g \preceq \mathrm{id}_B$.
   (a) i' が p の right-up-term ならば，$f' = i', g' = p$ と置くと $g' \circ f' = p \circ i' \succeq \mathrm{id}_A$ であり，補題 1 を用いることができる．$g' = g$（したがって，$g' \preceq g$ ）なので補題 1 の 1. により $f \preceq f'$ であり，$i \preceq i'$．i は p の right-up-term なので，i は p の最小の right-up-term.
   (b) p' が i の left-up-term ならば，$f' = i, g' = p'$ と置くと $g' \circ f' = p' \circ i \succeq \mathrm{id}_A$ であり，補題 1 を用いることができる．$f' = f$ （したがって，$f' \preceq f$）なので補題 1 の 2. により $g \preceq g'$ であり，$p \preceq p'$．p は i の left-up-term なので，p は i の最小の left-up-term.
2. (a) $\langle p, i'\rangle$ もガロア対ならば，i' も最小なので $i' \preceq i$ でもあり，$i \preceq i'$ と併せて，$i = i'$.
   (b) $\langle p', i\rangle$ もガロア対ならば，p' も最小なので $p' \preceq p$ でもあり，$p \preceq p'$ と併せて，$p = p'$.
3. 補題 1 から明らか．

$\square$

命題 1 の 2. により，ガロア対となる p, i 相互の一意性が証明されたので

- $p \in \hom(B, A)$ に対して $\langle p, i \rangle$ がガロア対となる i が存在するとき，p は B から A への left-Galois morphism,
- $i \in \hom(A, B)$ に対して $\langle p, i \rangle$ がガロア対となる p が存在するとき，i は A から B への right-Galois morphism

であると言い，

- p が left-Galois morphism であるとき，$\langle p, i \rangle$ がガロア対となる i を $i(p)$
- i が right-Galois morphism であるとき，$\langle p, i \rangle$ がガロア対となる p を $p(i)$

と表すことにする．

この記号を用いると，命題 1 の 3. を

$$p' \preceq p \implies i(p) \preceq i(p') \tag{1.4}$$
$$i' \preceq i \implies p(i) \preceq p(i') \tag{1.5}$$

と書くことができる．

$\langle p, i \rangle$ がガロア対であることは，色々な図式で表すことができる：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[l, "p"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_B"] \arrow[dl, phantom, "\preceq"] \\ A \arrow[r, "i(p)"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A & B \arrow[l, "p"'] \arrow[dl, phantom, "\preceq"] \\ A \arrow[u, "\mathrm{id}_A"] \arrow[r, "i(p)"'] & B \arrow[u, "\mathrm{id}_B"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[l, "p(i)"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_B"] \arrow[dl, phantom, "\preceq"] \\ A \arrow[r, "i"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A & B \arrow[l, "p(i)"'] \arrow[dl, phantom, "\preceq"] \\ A \arrow[u, "\mathrm{id}_A"] \arrow[r, "i"'] & B \arrow[u, "\mathrm{id}_B"'] \end{tikzcd}$$

$$\langle p, i \rangle = \langle p, i(p) \rangle = \langle p(i), i \rangle, \qquad i(p) = i,\ p(i) = p.$$

さらに，$\langle p, i \rangle$ がレトラクト対ならば，右の図式の不等号は等号となる；

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[l, "p"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_B"] \arrow[dl, phantom, "\preceq"] \\ A \arrow[r, "i(p)"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A & B \arrow[l, "p"'] \arrow[dl, phantom, "="] \\ A \arrow[u, "\mathrm{id}_A"] \arrow[r, "i(p)"'] & B \arrow[u, "\mathrm{id}_B"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[l, "p(i)"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_B"] \arrow[dl, phantom, "\preceq"] \\ A \arrow[r, "i"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A & B \arrow[l, "p(i)"'] \arrow[dl, phantom, "="] \\ A \arrow[u, "\mathrm{id}_A"] \arrow[r, "i"'] & B \arrow[u, "\mathrm{id}_B"'] \end{tikzcd}$$

$$\langle p, i\rangle = \langle p, i(p)\rangle = \langle p(i), i\rangle, \qquad i(p) = i,\ p(i) = p.$$

ガロア対やレトラクト対を考えていることが明らかな場合には，等号，不等号を明記することなしに，また，$\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_B$ 等の恒等射矢印の向きを指定せずに，省略された形の図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, dash, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[l, "p"'] \arrow[d, dash, "\mathrm{id}_B"] \\ A \arrow[r, "i(p)"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[d, dash, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[l, "p(i)"'] \arrow[d, dash, "\mathrm{id}_B"] \\ A \arrow[r, "i"'] & B \end{tikzcd}$$

を用いても良いことにする．

1.2.1.2 ガロア対の圏

$A \xleftarrow{p_1} B$, $B \xleftarrow{p_2} C$ が left-Galois morphism ならば，

$$\begin{aligned}(p_1 \circ p_2) \circ (i(p_2) \circ i(p_1)) &= p_1 \circ (p_2 \circ i(p_2)) \circ i(p_1) \\ &\succeq p_1 \circ \mathrm{id}_B \circ i(p_1) = p_1 \circ i(p_1) \\ &\succeq \mathrm{id}_A,\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}(i(p_2) \circ i(p_1)) \circ (p_1 \circ p_2) &= i(p_2) \circ (i(p_1) \circ p_1) \circ p_2 \\ &\preceq i(p_2) \circ \mathrm{id}_B \circ p_2 = i(p_2) \circ p_2 \\ &\preceq \mathrm{id}_C\end{aligned}$$

なので，$p_1 \circ p_2$ も left-Galois morphism であり，

$$i(p_1 \circ p_2) = i(p_2) \circ i(p_1)$$

となる．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, dash, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[l, "p_1"'] \arrow[d, dash, "\mathrm{id}_B"'] & C \arrow[l, "p_2"'] \arrow[d, dash, "\mathrm{id}_C"] \\ A \arrow[r, "i(p_1)"'] & B \arrow[r, "i(p_2)"'] & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[d, dash, "\mathrm{id}_A"'] & C \arrow[l, "p_1 \circ p_2"'] \arrow[d, dash, "\mathrm{id}_C"] \\ A \arrow[r, "i(p_2) \circ i(p_1)"'] & C \end{tikzcd}$$

O1-圏 $\mathcal{C}$ において，

1. id_A は left-Galois morphism,

2. $g \in \hom(A, B)$, $f \in \hom(B, C)$ が left-Galois morphism ならば，$f \circ g$ も left-Galois なので，

1. 対象は，$\mathcal{C}$ の対象
2. 射は，$\mathcal{C}$ の left-Galois morphism

として圏を定めることができる．この圏を，$\mathcal{C}$ から得られる left-Galois 圏と言い，$Gal(\mathcal{C})$ と表すことにする．

ガロア対が特にレトラクト対である場合が，これから重要になるので，用語を準備しておく．

定義 3. ガロア対 $\langle p, i \rangle$ がレトラクト対であるとき，p を Retraction, i を Section と言う．

レトラクト対の場合には，不等式 (1.6) は等式に変わり，$p_1 \circ p_2$ も Retraction となる．

射を Retraction のみに制限した圏を定めることもできる．この圏を，$\mathcal{C}$ から得られる Retraction の圏と言い，$R(\mathcal{C})$ と表すことにする．

Remark. left-Galois 圏（もしくは，Retraction の圏）は，p に対して $i(p)$ を定める函手を考えることにより，right-Galois morphism （もしくは， Section） から成る逆圏と対応する．

関係式 $i(p_1 \circ p_n) = i(p_1) \circ i(p_2)$ は帰納法を用いて

$$\begin{aligned} i(p_1 \circ (p_2 \circ \cdots \circ p_n)) &= i(p_2 \circ \cdots \circ p_n) \circ i(p_1) \\ &= (i(p_n) \circ \cdots \circ i(p_2)) \circ i(p_1) \end{aligned}$$

とすることができるので，一般的な関係式

$$i(p_1 \circ \cdots \circ p_n) = i(p_n) \circ \cdots \circ i(p_1)$$

が成立する．同じく，

$$p(i_n \circ \cdots \circ i_1) = p(i_1) \circ \cdots \circ p(i_n).$$

left-Galois morphism の図式（もしくは，Retraction の図式）

$$\begin{tikzcd}
& B_1 \arrow[dl, "p_1"'] & \cdots\cdots \arrow[l, "p_2"'] & B_{m-1} \arrow[l, "p_{m-1}"'] & \\
A & & & & D \arrow[ul, "p_m"'] \arrow[dl, "q_n"] \\
& C_1 \arrow[ul, "q_1"] & \cdots\cdots \arrow[l, "q_2"] & C_{n-1} \arrow[l, "q_{n-1}"] &
\end{tikzcd} \tag{1.7}$$

において，不等式

$$p_1 \circ p_2 \circ \cdots \circ p_m \preceq q_1 \circ q_2 \circ \cdots \circ q_n$$

が成立しているならば（両辺共に left-Galois morphism なので），命題 1 の 3. により

$$i(q_1 \circ q_2 \circ \cdots \circ q_n) \preceq i(p_1 \circ p_2 \circ \cdots \circ p_m)$$

であり，したがって，right-Galois morphism の図式（もしくは，Section の図式）

$$\begin{tikzcd}
 & B_1 \arrow[r, "i(p_2)"] & \cdots\cdots \arrow[r, "i(p_{m-1})"] & B_{m-1} \arrow[dr, "i(p_m)"] & \\
A \arrow[ur, "i(p_1)"] \arrow[dr, "i(q_1)"'] & & & & D \\
 & C_1 \arrow[r, "i(q_2)"'] & \cdots\cdots \arrow[r, "i(q_{n-1})"'] & C_{n-1} \arrow[ur, "i(q_n)"'] &
\end{tikzcd} \tag{1.8}$$

における逆向きの不等式

$$i(q_n) \circ \cdots \circ i(q_2) \circ i(q_1) \preceq i(p_m) \circ \cdots \circ i(p_2) \circ i(p_1)$$

を得る．また，図式 (1.7) が可換ならば，図式 (1.8) も可換.

1.3 レトラクト列

1.3.1 Retraction の圏

1.3.1.1 全射型と単射型

ここまで，レトラクト対の性質のうち，一般にガロア対に対して述べることのできるものを扱ってきたのだが，ここから，レトラクト対であることが必須の結果に移る．

記号 pr, in は，それぞれ Retraction, Section に対してのみ用いることにする．また，レトラクト対であることを明示したい場合，レトラクト対 $\langle g, f \rangle$ を $[g, f]$ と表す．

集合の要素を用いて定義されている全射 (surjective)・単射 (injective) に代わる用語として，**全射型** (epi)・**単射型** (mono) を用いる；

1. $g \in \mathrm{hom}(A, B)$ は，任意の対象 C と $f_1, f_2 \in \mathrm{hom}(B, C)$ に対して

   $$f_1 \circ g = f_2 \circ g \implies f_1 = f_2$$

   となるときに全射型

2. $f \in \mathrm{hom}(B, C)$ は，任意の対象 A と $g_1, g_2 \in \mathrm{hom}(A, B)$ に対して

   $$f \circ g_1 = f \circ g_2 \implies g_1 = g_2$$

   となるときに単射型

であると言う．(⇒ Appendix A 3.1.3)

$[pr, in]$ がレトラクト対ならば，pr は全射型であり，in は単射型である；
pr が全射型であることは，

$$\begin{aligned} f_1 \circ pr = f_2 \circ pr &\implies (f_1 \circ pr) \circ in = (f_2 \circ pr) \circ in \\ &\implies f_1 \circ (pr \circ in) = f_2 \circ (pr \circ in) \\ &\implies f_1 \circ \mathrm{id}_A = f_2 \circ \mathrm{id}_A \\ &\implies f_1 = f_2 \end{aligned}$$

in が単射型であることは，

$$\begin{aligned} in \circ g_1 = in \circ g_2 &\implies pr \circ (in \circ g_1) = pr \circ (in \circ g_2) \\ &\implies (pr \circ in) \circ g_1 = (pr \circ in) \circ g_2 \\ &\implies g_1 = g_2 \end{aligned}$$

となることからわかる．これは，$pr \circ in = \mathrm{id}_A$ であることのみから導かれる．

逆に，ガロア対 $A \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} B$ の i が単射型の場合，もしくは，p が全射型の場合，$p \circ i = \mathrm{id}_A$ であることが導かれ，$\langle p, i \rangle$ はレトラクト対となる；

- p が全射型なら，

  $$(p \circ i) \circ p = \mathrm{id}_A \circ p \qquad (\Leftarrow (1.2) \text{ 式})$$

  から $p \circ i = \mathrm{id}_A$ が導かれ，

- i が単射型ならば，

  $$i \circ (p \circ i) = i \circ \mathrm{id}_A \qquad (\Leftarrow (1.3) \text{ 式})$$

  から $p \circ i = \mathrm{id}_A$ が導かれる．

したがって，レトラクト対は，

p が全射型，i が単射型となるガロア対 $\langle p, i \rangle$

として定義することもできる．

1.3.1.2　記号

O1 圏 $\mathcal{C}$ から 圏 $R(\mathcal{C})$ を以下のように定める；

1. 圏 $R(\mathcal{C})$ の対象は，圏 $\mathcal{C}$ の対象.

2. 対象 B から対象 A への射は，B から A への Retraction

圏 $R(\mathcal{C})$ での B から A への射の集合（つまり，B から A への Retraction の集合）を，

$$\hom_R(B, A)$$

と表すことにする．$p \in \hom_R(B, A)$ に対して，$[p, i]$ がレトラクト対となる i が一意に定まるので，$[p, i]$ を射と考えても良い．図式での記号として基本的には

$$A \overset{p}{\longleftarrow\!\rhook} B,$$

を用いることにするが,「射の内訳」まで表したいときには，圏 $R(\mathcal{C})$ の図式でも

$$A \underset{i}{\overset{p}{\leftrightarrows}} B$$

という「矢印」を用い，さらにその省略形などのバージョン

$$A \overset{p}{\leftrightarrows} B \qquad A \overset{p/i}{\longleftarrow\!\rhook} B \qquad A \overset{p/i}{\longleftarrow} B$$

を（図式が煩雑にすることを避けるために，誤解が生じそうもない場合には）使うことにする．

Remark. Retraction を射として圏を考えたが，Section を射とした圏を考えることも可能.「矢印」の向きは逆になり，したがって射の合成の順番も逆転するが，内容は完全に対応する（圏論で言うところの逆圏となる）.

Remark. Retraction の圏とは言っても，実質的にはレトラクト対 $[p, i]$ を考えていることになるので，レトラクト対を射として圏を定義しても同じことになる．この場合，図式が可換ということは，Retraction と Section の両方について可換と言うことを意味することになるが，Retraction について可換ならば Section についても可換になるので，可換性は Retraction についてのみ確かめるだけで十分.

1.3.2 射影列と射影極限

1.3.2.1 用語

なんらかの圏 $\mathcal{C}$ において，

- $D_0 \xleftarrow{p_0} D_1 \xleftarrow{p_1} \cdots\cdots \xleftarrow{p_{n-1}} D_n \xleftarrow{p_n} \cdots\cdots$ を射影列
- $D_0 \xrightarrow{i_1} D_1 \xrightarrow{i_2} \cdots\cdots \xrightarrow{i_n} D_n \xrightarrow{i_{n+1}} \cdots\cdots$ を帰納列

と言う.

なお，D_j から D_k への写像であることを明示したい場合には，f_k^j のような表記を用いることにする．したがって，

$$p_j = p_j^{j+1}, \quad i_j = i_j^{j-1}$$

ということになる．また，射影列や帰納列では，特に断らない限り，$m \leq n$ に対して射の合成により p_m^n, i_n^m を定める；

$$\begin{aligned} p_m^n &= p_m^{m+1} \circ p_{m+1}^{m+2} \cdots \circ p_{n-1}^n = p_m \circ p_{m+1} \circ \cdots \circ p_{n-1}, \\ i_n^m &= i_n^{n-1} \circ i_{n-1}^{n-2} \circ \cdots \circ i_{m+1}^m = i_n \circ i_{n-1} \circ \cdots \circ i_{m+1}. \end{aligned}$$

Remark. id_{D_n} については，id_n^n と書くまでもないので，ほとんどの場合，id_n と表す．

射影列 $D_0 \xleftarrow{p_0} D_1 \xleftarrow{p_1} \cdots\cdots \xleftarrow{p_{n-1}} D_n \xleftarrow{p_n} \cdots\cdots$ が与えられているとする．このとき，

> $\mathcal{C}$ の対象 X からの射の族 $f_j : X \longrightarrow D_j$, $j = 0, 1, \ldots$ が関係
>
> $$f_j = p_j \circ f_{j+1}, \quad j = 0, 1, \ldots$$
>
> を満たすとき，この射の族を射影列への射の族という．
> X と射の族の対 $\langle X, \{f_j\}_{j=0,1,2,\ldots} \rangle$ を，射影列の上界ということにする．

射影列の上界は，省略された形で $\langle X, f_j \rangle$ と，もしくは，さらに射の族 f_j を明示することを省略して，X と表しても良いことにする．

D は $\mathcal{C}$ の対象であり，$\pi_j : D \longrightarrow D_j$, $j = 0, 1, \ldots$ は射影列への射の族であるとする（したがって，D はこの射影列の上界）．このとき，

1. $\mathcal{C}$ の任意の対象 X からの射影列への射の族 $f_j : X \longrightarrow D_j$, $j = 0, 1, \ldots$ に対して（つまり，射影列の任意の上界 X に対して），X から D への射 f であって

$$\pi_j \circ f = f_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

となるものが存在するならば，D は射影列の上限であると言うことにする．

2. $\mathcal{C}$ の任意の対象 X からの射 $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} D$ に対して

$$\pi_j \circ f = \pi_j \circ g \quad (\forall j = 0, 1, 2, \ldots) \implies f = g$$

となるとき，$\langle D, \pi_j \rangle$ は（等号についての）簡約性を持つという．

3. $\mathcal{C}$ の任意の対象 X からの射 $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} D$ に対して

$$\pi_j \circ f \preceq \pi_j \circ g \quad (\forall j = 0, 1, 2, \ldots) \implies f \preceq g$$

となるとき，$\langle D, \pi_j \rangle$ は不等式についての簡約性を持つという．

4. $\langle D, \pi_j \rangle$ が射影列の上限であって，かつ，簡約性を持つとき，$\langle D, \pi_j \rangle$ は射影列の射影極限であると言う．

Remark.

1. 射影極限では，$\pi_j \circ f = f_j$ となる f の一意性は，等号についての簡約性により保証される．
2. 射影極限は同型を除いて一意に定まる †．
3. D が不等式についての簡約性をもつならば等号についての簡約性も持つ．
4. 射影列についての上限や上界は，対象の間の射の存在を前順序と捉えての連想に過ぎない．したがって，poset での最大，上界，上限などについての性質が成立することは期待できない．例えば，上限の一意性は保証されない（最小元の一意性が言えないため）．
5. $\mathcal{C}$ の対象が poset の場合，射影極限 D を集合論的な操作で構成することができる．この場合，D の順序の定義は，不等式についての簡約性そのものとなる．

Remark.† 一応，証明をしておく；
$\langle D, \pi_j \rangle$, $\langle D', \pi'_j \rangle$ は共に同じ射影列の射影極限であるとする．

1. $f \in \hom(D, D')$, $f' \in \hom(D', D)$ で

- $\pi'_j \circ f = \pi_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$
- $\pi_j \circ f' = \pi'_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$

となるものが存在する．

2. したがって，$\pi_j \circ (f' \circ f)$ を計算すると，
$$\begin{aligned}\pi_j \circ (f' \circ f) &= (\pi_j \circ f') \circ f \\ &= \pi'_j \circ f = \pi_j \\ &= \pi_j \circ \mathrm{id}_D, \quad j = 0, 1, 2, \ldots\end{aligned}$$
なので，π_i の簡約性により $f' \circ f = \mathrm{id}_D$ であり，また，$\pi'_j \circ (f \circ f')$ を計算すると，$f \circ f' = \mathrm{id}_{D'}$.

3. よって，D, D' は同型であり，f は D から D' への同型射（のひとつ）となる．

圏の射の向きを逆転させた逆圏を考えれば同じ事なのだが，帰納列からの射の族，帰納極限も定義しておこう；

帰納列 $D_0 \xrightarrow{i_1} D_1 \xrightarrow{i_2} \cdots\cdots \xrightarrow{i_n} D_n \xrightarrow{i_{n+1}} \cdots\cdots$ が与えられているとする．このとき，

1. $\mathcal{C}$ の対象 X への射の族 $f_j : D_j \longrightarrow X$, $j = 0, 1, \ldots$ が関係
$$f_j = f_{j+1} \circ i_{j+1}, \quad j = 0, 1, \ldots$$
を満たすとき，この射の族を帰納列からの射の族という．

2. D は $\mathcal{C}$ の対象であり，$\iota_j : D_j \longrightarrow D$, $j = 0, 1, \ldots$ は帰納列からの射の族であるとする．このとき，$\mathcal{C}$ の任意の対象 X への帰納列から射の族 $f_j : D_j \longrightarrow X$, $j = 0, 1, \ldots$ に対して，D から X への射 f であって
$$f \circ \iota_j = f_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$
となるものが一意に存在するならば，D は帰納列の帰納極限であると言う．

1.3.3 レトラクト列

O1 圏 $\mathcal{C}$ において，レトラクト列

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
D_0 & \xleftarrow{pr_0} & D_1 & \xleftarrow{pr_1} & D_2 & \xleftarrow{pr_2} & \cdots\cdots & \xleftarrow{pr_{n-2}} & D_{n-1} & \xleftarrow{pr_{n-1}} & D_n & \xleftarrow{pr_n} & D_{n+1} & \xleftarrow{pr_{n+1}} & \cdots\cdots \\
\mathrm{id}\Big| & & \mathrm{id}\Big| & & \mathrm{id}\Big| & & & & \mathrm{id}\Big| & & \mathrm{id}\Big| & & \mathrm{id}\Big| & & \\
D_0 & \xrightarrow[in_1]{} & D_1 & \xrightarrow[in_2]{} & D_2 & \xrightarrow[in_3]{} & \cdots\cdots & \xrightarrow[in_{n-1}]{} & D_{n-1} & \xrightarrow[in_n]{} & D_n & \xrightarrow[in_{n+1}]{} & D_{n+1} & \xrightarrow[in_{n+2}]{} & \cdots\cdots
\end{array}$$

が与えられているとする．

$$D_0 \underset{in_1}{\overset{pr_0}{\leftrightarrows}} D_1 \underset{in_2}{\overset{pr_1}{\leftrightarrows}} D_2 \underset{in_3}{\overset{pr_2}{\leftrightarrows}} \cdots\cdots \underset{in_{n-1}}{\overset{pr_{n-2}}{\leftrightarrows}} D_{n-1} \underset{in_n}{\overset{pr_{n-1}}{\leftrightarrows}} D_n \underset{in_{n+1}}{\overset{pr_n}{\leftrightarrows}} D_{n+1} \underset{in_{n+2}}{\overset{pr_{n+1}}{\leftrightarrows}} \cdots\cdots$$

と書いても同じことなのだが，$\langle pr_n, in_{n+1}\rangle$ がレトラクト対となっていることを強調し，また，

射影列 $\quad D_0 \xleftarrow{pr_0} \cdots \xleftarrow{pr_{n-1}} D_n \xleftarrow{pr_n} D_{n+1} \xleftarrow{pr_{n+1}} \cdots$

帰納列 $\quad D_0 \xrightarrow[in_1]{} \cdots \xrightarrow[in_n]{} D_n \xrightarrow[in_{n+1}]{} D_{n+1} \xrightarrow[in_{n+2}]{} \cdots$

を分離して考えたいので（特に射影列に注目して考えたいので），間に id を挟んだ形の図式としている．

したがって，常に，以下の条件を仮定していることになる；

> **条件：** $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，
>
> $$\begin{aligned} pr_n \circ in_{n+1} &= \mathrm{id}_n \\ in_{n+1} \circ pr_n &\preceq \mathrm{id}_{n+1}. \end{aligned}$$

レトラクト列を記号 (D_j, pr_j, in_j) で表すことにする．また，レトラクト列 (D_j, pr_j, in_j) の射影列を (D_j, pr_j)，帰納列を (D_j, in_j) で表すことにする．

O1-圏 $\mathcal{C}$ でのレトラクト列 (D_j, pr_j, in_j) は，圏 $R(\mathcal{C})$ では射影列

$$D_0 \xleftarrow{pr_0} D_1 \xleftarrow{pr_1} \cdots\cdots \xleftarrow{pr_{n-1}} D_n \xleftarrow{pr_n} D_{n+1} \xleftarrow{pr_{n+1}} \cdots$$

として表されることになる．

1.3.4 圏 $R(\mathcal{C})$ での上界

1.3.4.1 ι_n の構成

O1 圏 $\mathcal{C}$ において，レトラクト列の射影列 (D_j, pr_j)

$$D_0 \xleftarrow{pr_0} \cdots \xleftarrow{pr_{n-1}} D_n \xleftarrow{pr_n} D_{n+1} \xleftarrow{pr_{n+1}} \cdots$$

が与えられているとして，次の命題を証明する；

命題 2.　1. $m=0,1,2,\dots$ に対して，D_m から $D_0,D_1,\dots$ への射 $f_j^m,\ j=0,1,2,\dots$ を

$$f_j^m=\begin{cases} pr_j^m, & j\le m\\ in_j^m, & m\le j\end{cases}$$

と定める（$j=m$ のときは $pr_m^m=\mathrm{id}_m=in_m^m$）．各 m に対して，射の族 $\{f_j^m\}_{j=0,1,\dots}$ は射影列 (D_j,pr_j) への射の族となる；

$$pr_{j-1}^j\circ f_j^m=f_{j-1}^m\quad j=1,2,\dots.$$

2. D が射影列 (D_j,pr_j) の上限ならば，各 $m=0,1,2\dots$ に対して，

$$\pi_j\circ i^m=f_j^m,\ j=0,1,2,\dots$$

となる射 $D_m\xrightarrow{i^m}D$ が存在する．

3. さらに $\langle D,\pi_j\rangle$ が不等式についての簡約性をもつならば，$\langle\pi_m,\iota^m\rangle$ はレトラクト対となる．

［証明］

1. $j\le m$ と $j\ge m+1$ で場合分けして考えると，

$$pr_{j-1}^j\circ f_j^m=\begin{cases} pr_{j-1}^j\circ pr_j^m=pr_{j-1}^m, & j=1,2,\dots,m\\ pr_{j-1}^j\circ in_j^m=in_{j-1}^m, & j=m+1,m+2,\dots\end{cases}\quad(\Leftarrow in_j^m=in_j^{j-1}\circ in_{j-1}^m)$$

であり，$\{f_j^m\}_{j=0,1,\dots}$ は射影列への射の族となる．

D がこの射影列の上限ならば，上限の定義により D_m から D への射 f^m で

$$\pi_j\circ f^m=f_j^m,\ j=0,1,2,\dots$$

となるものが存在する．この射 f^m を ι^m と表すと，

$$\pi_j\circ\iota^m=f_j^m=\begin{cases} pr_j^m, & j=0,1,\dots,m\\ in_j^m, & j=m,m+1,\dots\end{cases}$$

であり，$\ell\le m\le n$ として可換図式（pr, in の添え字は省略）

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "\pi_\ell"'] \arrow[dr, "\pi_n"] & \\ D_\ell & D_m \arrow[l, "pr"] \arrow[u, "\iota^m"] \arrow[r, "in"'] & D_n \end{tikzcd}$$

を得る．

2. $\langle \pi_m, \iota^m \rangle$ がレトラクト対となることを確かめる．$\pi_m \circ \iota^m = \mathrm{id}_m$ は定義から明らかなので，$\iota^m \circ \pi_m \preceq \mathrm{id}_D$ となることを示す．

   $\{\pi_j\}_{j=0,1,\ldots}$ は不等号についての簡約性をもつので，

   $$\pi_j \circ (\iota^m \circ \pi_m) \preceq \pi_j \qquad (\forall j = 0, 1, 2, \ldots)$$

   となることを示せば良いが，これも j の値で場合分けして評価すると，

   (a) $\ell = 0, 1, \ldots, m$ に対して，

   $$\begin{aligned} \pi_\ell \circ (\iota^m \circ \pi_m) &= (\pi_\ell \circ \iota^m) \circ \pi_m \\ &= pr_\ell^m \circ \pi_m = \pi_\ell \end{aligned}$$

   (b) $n = m+1, m+2, \ldots$ に対して，

   $$\begin{aligned} \pi_n \circ (\iota^m \circ \pi_m) &= (\pi_n \circ \iota^m) \circ \pi_m \\ &= in_n^m \circ \pi_m \\ &= in_n^m \circ (pr_m^n \circ \pi_n) \\ &= (in_n^m \circ pr_m^n) \circ \pi_n \\ &\preceq \mathrm{id}_n \circ \pi_n = \pi_n \end{aligned}$$

   であり，任意の $j = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $\pi_j \circ (\iota^m \circ \pi_m) \preceq \pi_j$.

□

系 1. O1 圏 $\mathcal{C}$ において，$\langle D, \pi_j \rangle$ は レトラクト列の射影列 (D_j, pr_j) の射影極限であり，かつ，不等号についての簡約性を持つとする †．このとき，各 π_j は Retraction であり，D は射影列 (D_j, pr_j) の圏 $R(\mathcal{C})$ における上界となる．

Remark.† 一般に，射影極限は（ここでの）定義により等号についての簡約性をもつのだが，不等号についての簡約性を持つとは限らない．(⇒ Appendix A 3.2).

1.3.4.2 $R(\mathcal{C})$ における上界

逆に，$\langle D, \pi_j \rangle$ が $R(\mathcal{C})$ における上界であるとする（圏 $\mathcal{C}$ において射影極限であることも，簡約性を持つことも仮定しない）．したがって，$\langle \pi_j, \iota^j \rangle$ がレトラクト対となる $\iota^j \in \hom(D_j, D)$ が存在し，$\{\iota^j\}$ は帰納列からの射の族となる；

$$\begin{aligned} \iota^j &= i(\pi_j) \\ &= i(pr_j^{j+1} \circ \pi_{j+1}) \\ &= i(\pi_{j+1}) \circ i(pr_j^{j+1}) \\ &= \iota^{j+1} \circ in_{j+1}^j. \end{aligned}$$

$$
\begin{tikzcd}
 & D \arrow[d, "\pi_j"'] \arrow[dr, "\pi_{j+1}"] & & \\
\cdots & D_j \arrow[l] & D_{j+1} \arrow[l, "pr"] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & D & & \\
\cdots \arrow[r] & D_j \arrow[u, "\iota^j"] \arrow[r, "in"'] & D_{j+1} \arrow[ul, "\iota^{j+1}"'] \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

　この場合にも，

$$
\pi_m \circ \iota^j = \begin{cases} pr^j_m & m \leq j \\ in^j_m & j \leq m \end{cases}
$$

となることを確かめておこう．まず，$m \leq j$ となる j に対して

$$
\begin{aligned}
\pi_m \circ \iota^j &= (pr^j_m \circ \pi_j) \circ \iota^j \\
&= pr^j_m \circ (\pi_j \circ \iota^j) \\
&= pr^j_m \circ \mathrm{id}_j = pr^j_m.
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

$j \leq m$ に対しては，

$$
\begin{aligned}
\pi_m \circ \iota_j &= \pi_m \circ (\iota_m \circ in^j_m) \\
&= (\pi_m \circ \iota_m) \circ in^j_m \\
&= \mathrm{id}_m \circ in^j_m = in^j_m.
\end{aligned}
$$

　また，$\iota^j \circ \pi_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ は増加列となる；

$$
\begin{aligned}
\iota^j \circ \pi_j &= \iota^j \circ (pr^{j+1}_j \circ \pi_{j+1}) \\
&= (\iota^{j+1} \circ in^j_{j+1}) \circ (pr^{j+1}_j \circ \pi_{j+1}) \\
&= \iota^{j+1} \circ (in^j_{j+1} \circ pr^{j+1}_j) \circ \pi_{j+1} \\
&\preceq \iota^{j+1} \circ \mathrm{id}_j \circ \pi_{j+1} = \iota^{j+1} \circ \pi_{j+1}
\end{aligned}
$$

増加列になることの証明は，$\{\pi_j\}$ の代わりに，D とは別の対象 X から射影列への射の族 $\{f_j\}$ についても成立する；

$$
\begin{aligned}
\iota^j \circ f_j &= \iota^j \circ (pr^{j+1}_j \circ f_{j+1}) \qquad (\Leftarrow \{f_j\} \text{ は射影列への射の族}) \\
&= (\iota^{j+1} \circ in^j_{j+1}) \circ (pr^{j+1}_j \circ f_{j+1}) \\
&= \iota^{j+1} \circ (in^j_{j+1} \circ pr^{j+1}_j) \circ f_{j+1} \\
&\preceq \iota^{j+1} \circ \mathrm{id}_j \circ f_{j+1} = \iota^{j+1} \circ f_{j+1}
\end{aligned}
$$

また，$m \leq j$ ならば，

$$
\begin{aligned}
\pi_m \circ (\iota^j \circ f_j) &= (pr^j_m \circ \pi_j) \circ (\iota^j \circ f_j) \\
&= pr^j_m \circ (\pi_j \circ \iota^j) \circ f_j \\
&= pr^j_m \circ \mathrm{id}_j \circ f_j \\
&= f_m.
\end{aligned}
$$

補題の形で，結果をまとめておく；

補題 2. **O1** 圏 $\mathcal{C}$ において，レトラクト列の射影列 (D_j, pr_j)

$$D_0 \xleftarrow{pr_0} \cdots \xleftarrow{pr_{n-1}} D_n \xleftarrow{pr_n} D_{n+1} \xleftarrow{pr_{n+1}} \cdots$$

が与えられているとする．$\langle D, \pi_j \rangle$ は圏 $R(\mathcal{C})$ における (D_j, pr_j) の上界であり，また，$\{f_j\}$ は圏 $\mathcal{C}$ における (D_j, pr_j) の上界であるとする．このとき，圏 $\mathcal{C}$ において $\iota^j = i(\pi_j)$ として ι^j を定めると，

1. $\iota^j \circ f_j,\ j = 0, 1, 2, \ldots$ は増加列；$\iota^j \circ f_j \preceq \iota^{j+1} \circ f_{j+1}$.
2. $\pi_m \circ (\iota^j \circ f_j) = f_m, \quad j = m, m+1, m+2, \ldots$.

こうなると，増加列 $\{\iota^j \circ f_j\}$ の極限 $\lim_{j\to\infty} (\iota^j \circ f_j)$ を考えたい状況なのだが，**O1** 圏という条件だけでは極限を扱うには不十分である．射影極限という用語にも「極限」という言葉は含まれているのだが，射影極限は，言うならば D_j の列をまとめて考えているだけで，普通の意味での「極限」とは異なる．これから，対象 D' から D への射の集合 $\hom(D', D)$ の中での（普通の感覚での）極限を考えることになる．そのために，**O1** に条件を追加して **O2** 圏を定義する．

1.3.5 O2 圏

1.3.5.1 定義

次の条件を満たす圏を **O2** 圏と言うことにする：

1. （**O1** 圏の条件）
   (a) $f_1, f_2 \in \hom(A, B),\ g \in \hom(B, C)$ に対して，$f_1 \preceq f_2 \implies g \circ f_1 \preceq g \circ f_2$.
   (b) $g \in \hom(A, B),\ f_1, f_2 \in \hom(B, C)$ に対して，$f_1 \preceq f_2 \implies f_1 \circ g \preceq f_2 \circ g$.
2. 対象 A, B と，単調列 $f_1, f_2, \ldots \in \hom(A, B)$ に対して，$\hom(A, B)$ の要素 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ を与える操作 $\lim\limits_{n\to\infty}$ が定められていて，以下の条件を満たす：
   (a) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が単調列ならば
      i. $\lim\limits_{n\to\infty} (g \circ f_n) = g \circ \lim\limits_{n\to\infty} f_n$.
      ii. $\lim\limits_{n\to\infty} (f_n \circ g) = (\lim\limits_{n\to\infty} f_n) \circ g$.
   (b) $\hom(A, B)$ の単調列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，

$$f_n \preceq g_n \ (\forall n \in \mathbb{N}) \implies \lim_{n\to\infty} f_n \preceq \lim_{n\to\infty} g_n.$$

(c) 単調列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がある番号から先で一定ならば，つまり，

$$f_n = f,\ n = n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots$$

となる $n_0 \in \mathbb{N}$ と f が存在するならば，

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f.$$

1.3.5.2　O2 圏での射影列

命題 3. **O2** 圏 $\mathcal{C}$ において，レトラクト列の射影列 $\langle D_j, pr_j\rangle$ が与えられているとする．$\langle D, \pi_j\rangle$ は，圏 $R(\mathcal{C})$ におけるこの射影列の上界であるとする．

1. $\langle D, \pi_j\rangle$ は，圏 $\mathcal{C}$ における上限となる．
2. $\langle D, \pi_j\rangle$ が圏 $\mathcal{C}$ における射影極限ならば，
$$\lim_{n\to\infty} (\iota^n \circ \pi_n) = \mathrm{id}_D. \tag{1.10}$$
3. 圏 $R(\mathbf{C})$ において $\langle D, \pi_j\rangle$ と $\langle D', \pi'_j\rangle$ が共にこの射影列の上界ならば，
$$\pi_j \circ \varphi = \pi'_j, \quad \pi'_j \circ \varphi' = \pi_j, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$$
を満たす射 $\varphi \in \mathrm{hom}(D', D)$, $\varphi' \in \mathrm{hom}(D, D')$ が存在する．等式 (1.10) が成立する場合には，$\varphi \circ \varphi' = \mathrm{id}_D$ となるように φ を選ぶことができる．
4. 射影列 $\langle D_j, pr_j\rangle$ の射影極限が存在するならば，等式 (1.10) は $\langle D, \pi_j\rangle$ が射影極限となるための十分条件になる．また，不等式についての簡約性を満たす射影極限が存在するならば，等式 (1.10) は，$\langle D, \pi_j\rangle$ が不等式についての簡約性を満たす射影極限となるための十分条件になる．

$$\begin{tikzcd} D' & D \arrow[l, "\varphi'"'] \arrow[d, "\pi_m"] \\ & D_m \arrow[from=1-1, "\pi'_m"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[drr, "\pi'_j"'] & D \arrow[dr, "\pi_j"] & \\ & & D_j \end{tikzcd}$$

［証明］

1. $\langle X, f_j\rangle$ は射影列 $\langle D_j, pr_j\rangle$ への射の族であるとする．このとき，補題 2 により $\iota^n \circ f_n$ は増加列であり，$\mathcal{C}$ が **O2** 圏であるという仮定により，$\lim_{n\to\infty}(\iota^n \circ f_n)$ が存在するので，
$$f = \lim_{n\to\infty} (\iota^n \circ f_n)$$

とおく．$f \in \hom(X, D)$ であり，

$$\begin{aligned}\pi_m \circ f &= \pi_m \circ \lim_{n\to\infty} (\iota^n \circ f_n)\\ &= \lim_{n\to\infty} (\pi_m \circ (\iota^n \circ f_n))\end{aligned}$$

となる．補題 2 により $n = m, m+1, m+2, \ldots$ に対して $\pi_m \circ (\iota_n \circ f_n) = f_m$ と一定になるので，**O2** 圏の条件により

$$\pi_m \circ f = \lim_{n\to\infty} (\pi_m \circ (\iota^n \circ f_n)) = f_m.$$

よって，$\langle D, \pi_j \rangle$ は射影列の上限となる．

2. $\langle X, f_j \rangle$ として $\langle D, \pi_j \rangle$ 自身を選ぶと，

$$\pi_m \circ \lim_{n\to\infty} (\iota^n \circ \pi_n) = \pi_m = \pi_m \circ \mathrm{id}_D$$

となるが，$\langle D, \pi_j \rangle$ が射影極限の場合には等号についての簡約性により，

$$\lim_{n\to\infty} (\iota^n \circ \pi_n) = \mathrm{id}_D$$

であることが導かれる．

3. $\langle D, \pi_j \rangle$ と $\langle D', \pi'_j \rangle$ は共に，圏 $R(\mathcal{C})$ におけるこの射影列の上界であるとする．$\langle D, \pi_j \rangle, \langle D', \pi'_j \rangle$ は圏 $\mathcal{C}$ における上限となるので，上限の定義により，

$$\pi_j \circ \varphi = \pi'_j, \quad \pi'_j \circ \varphi' = \pi_j, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$$

となる $\varphi \in \hom(D', D)$, $\varphi' \in \hom(D, D')$ が存在する．等式 (1.10) が成立している場合，φ として $\varphi = \lim_{n\to\infty}(\iota^n \circ \pi'_n)$ を選ぶと，

$$\begin{aligned}\varphi \circ \varphi' &= \left(\lim_{n\to\infty} \iota^n \circ \pi'_n\right) \circ \varphi'\\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\iota^n \circ (\pi'_n \circ \varphi')\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} (\iota^n \circ \pi_n)\\ &= \mathrm{id}_D.\end{aligned}$$

4. 射影列の射影極限が存在する場合には，D' として射影極限（のひとつ）を選ぶ．

$$\begin{aligned}\pi'_m \circ (\varphi' \circ \varphi) &= (\pi'_m \circ \varphi') \circ \varphi\\ &= \pi_m \circ \varphi\\ &= \pi'_m = \pi'_m \circ \mathrm{id}_{D'}\end{aligned}$$

が任意の $m=0,1,2,\ldots$ に対して成り立つので，$\{\pi'_n\}_{n=0,1,\ldots}$ が等号についての簡約性を持つことにより，等式

$$\varphi' \circ \varphi = \mathrm{id}_{D'}$$

が得られる．したがって，等式 (1.10) が成立するときには φ', φ は同型射であり，$\langle D, \pi_j \rangle$ も射影極限になる．また，$\langle D', \pi'_j \rangle$ が不等式についての簡約性を持つならば，$\langle D', \pi'_j \rangle$ と同型な $\langle D, \pi_j \rangle$ も不等式についての簡約性を持つ．

□

Remark. 　最後の不等式についての簡約性の証明は，同型ということの一般論から導いたが，以下のように直接確かめることもできる；$f, g \in \hom(X, D)$ が $\pi_j \circ f \preceq \pi_j \circ g$, $j = 0,1,2,\ldots$ を満たすとする．このとき，$f' = \varphi' \circ f$, $g' = \varphi' \circ g$ と置くと，

$$\pi'_j \circ f' = (\pi'_j \circ \varphi') \circ f = \pi_j \circ f, \quad \pi'_j \circ g' = (\pi'_j \circ \varphi') \circ g = \pi_j \circ g$$

なので，$\pi'_j \circ f' \preceq \pi'_j \circ g'$, $j = 0,1,2,\ldots$ であり，$\langle D', \pi'_j \rangle$ が不等号のついての簡約性を持つという仮定により，$f' \preceq g'$．したがって，$\varphi \circ f' \preceq \varphi \circ g$ となるが，$\varphi \circ \varphi' = \mathrm{id}_D$ なので，$\varphi \circ f' = \varphi \circ (\varphi' \circ f) = f$, $\varphi \circ g' = \varphi \circ (\varphi' \circ g) = g$ なので，$f \preceq g$. □

1.3.5.3 ここまでの流れ

以上，

O2 圏 $\mathcal{C}$ において，レトラクト列の射影列 $\langle D_j, pr_j \rangle$ が与えられているとする．$\langle D, \pi_j \rangle$ は，圏 $R(\mathcal{C})$ におけるこの射影列の上界（のひとつ）であるとする

という設定から始まって，$\langle D, \pi_j \rangle$ が圏 $\mathcal{C}$ における射影極限となるための条件を導いた．

命題 3 の 1. で示したように，$\langle D, \pi_j \rangle$ が（圏 $\mathcal{C}$ において）上限であることは，簡単に分かる．

しかし，ここで用いている「上限」という用語は，順序集合での上限と異なり射の存在を順序関係に見立てて定義した用語に過ぎず，一意性を保証する効果は期待できない．実際，命題 3 の証明で見たように，D, D' が共に上限ならば，$\pi_j \circ \varphi'_j = \pi'_j$, $\pi'_j \circ \varphi_j = \pi_j$ を満たす φ, φ' が存在し，

$$\pi'_m \circ (\varphi' \circ \varphi) = \pi'_m \circ \mathrm{id}_{D'}, \quad m = 0,1,2,\ldots$$

を満たし，また，

$$\pi_m \circ (\varphi \circ \varphi') = \pi_m \circ \mathrm{id}_D, \quad m = 0,1,2,\ldots$$

を満たすことも導かれる．しかし，等号についての簡約性が保証されていないので，ここから

$$\varphi' \circ \varphi = \mathrm{id}_{D'}, \quad \varphi \circ \varphi' = \mathrm{id}_D$$

へと進むことができない．$R(\mathcal{C})$ の上界というだけでは，$\langle D, \pi_j \rangle$ が射影極限になることは期待できそうもなく，なんらかの条件が必要になる．命題 3 では，

1. 射影列 $\langle D_j, pr_j \rangle$ に射影極限 $\langle D', \pi'_j \rangle$ が存在することを仮定する．$\{\pi'_j\}$ は等号についての簡約性をもつので，$\varphi' \circ \varphi = \mathrm{id}_{D'}$ が得られる．なお，圏 $\mathcal{C}$ が poset を対象とする（普通の）圏ならば，射影極限は常に集合論的手法で構成することができるので，これは，圏 $\mathcal{C}$ について仮定してしまっても良い条件である．

2. $\varphi \circ \varphi' = \mathrm{id}_D$ は，等式 (1.10) により保証される．D は射影極限と同型になり，したがって，射影極限（のひとつ）となる．この等式が本質的であり，単なる上限から射影極限を特徴付ける等式となる．

1.4 $E_j = \hom(D_j, D_j)$ のレトラクト列

1.4.1 圏 O1'

1.4.1.1 p^F と i^F

最初に，**O1** 圏の条件のみを仮定して考える．**O1** 圏 $\mathcal{C}$ において，$p \in \hom(B, A)$ と $i \in \hom(A, B)$ が対象 A, B の間のレトラクト対 $[p, i]$ となっているとする；

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] & B \arrow[l, "p"'] \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"] \\
A \arrow[r, "i"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad p \circ i = \mathrm{id}_A,\ i \circ p \preceq \mathrm{id}_B
$$

レトラクト対 $[p, i]$ に対して，

$$
\begin{aligned}
p^F : g \in \hom(B, B) &\quad\mapsto\quad p \circ g \circ i \\
i^F : f \in \hom(A, A) &\quad\mapsto\quad i \circ f \circ p
\end{aligned}
$$

と定める：

$$
\begin{tikzcd}
A & B \arrow[l, "p"'] \\
A \arrow[r, "i"'] \arrow[u, dotted, "p^F(g)"] & B \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}
\qquad
\hom(A, A) \xleftarrow{p^F} \hom(B, B)
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & B \arrow[l, "p"'] \arrow[d, dotted, "i^F(f)"] \\
A \arrow[r, "i"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\hom(A, A) \xrightarrow{i^F} \hom(B, B)
$$

この $\langle p^F, i^F \rangle$ は，個々の f, g に対してレトラクト対としての条件を満たす．まず，

$$
\begin{aligned}
(p^F \circ i^F)(f) &= p^F(i \circ f \circ p) \\
&= p \circ (i \circ f \circ p) \circ i \\
&= (p \circ i) \circ f \circ (p \circ i) \\
&= \mathrm{id}_A \circ f \circ \mathrm{id}_A = f
\end{aligned} \tag{1.11}
$$

であり，また，

$$
\begin{aligned}
(i^F \circ p^F)(g) &= i^F(p \circ g \circ i) \\
&= i \circ (p \circ g \circ i) \circ p \\
&= (i \circ p) \circ g \circ (i \circ p) \\
&\preceq \mathrm{id}_B \circ g \circ \mathrm{id}_B = g
\end{aligned} \tag{1.12}
$$

となる．

Retraction の合成 $A \underset{i_1}{\overset{p_1}{\rightleftarrows}} B \underset{i_2}{\overset{p_2}{\rightleftarrows}} C$ についても，$A \underset{i_2\circ i_1}{\overset{p_1\circ p_2}{\rightleftarrows}} C$ は C から A へのレトラクト対であり，$g \in \hom(C,C)$ に対して

$$
\begin{aligned}
(p_1 \circ p_2)^F(g) &= (p_1 \circ p_2) \circ g \circ (i_2 \circ i_1) \\
&= p_1 \circ (p_2 \circ g \circ i_2) \circ i_1 \\
&= p_1 \circ p_2^F(g) \circ i_1 \\
&= p_1^F(p_2^F(g)).
\end{aligned}
$$

となる．したがって，$(p_1 \circ p_2)^F = p_1^F \circ p_2^F$.

こうなると $p \mapsto p^F$ は函手であると言いたくなるのだが，ここまでの設定では，$\hom(A,A)$ が圏 $\mathcal{C}$ の対象になるとは要求していない．また，各 g についての不等式 (1.12) から，$i^F \circ p^F \preceq \mathrm{id}_{\hom(B,B)}$ という結論を導くことができるわけではない．**O1** 圏では，$\hom(A,B)$ が順序集合であることは仮定されているのだが，その順序が「各点的な順序」であると，つまり，

$$
f \preceq g \iff f(a) \preceq g(a) \quad (\forall a \in A)
$$

と定められていると仮定されているわけではない．

これから，レトラクト列

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
D_0 & \xleftarrow{pr_0} & D_1 & \xleftarrow{pr_1} & D_2 & \xleftarrow{pr_2} & \cdots\cdots & \xleftarrow{pr_{n-2}} & D_{n-1} & \xleftarrow{pr_{n-1}} & D_n & \xleftarrow{pr_n} & D_{n+1} & \xleftarrow{pr_{n+1}} & \cdots\cdots \\
{\scriptstyle \mathrm{id}}\big| & & {\scriptstyle \mathrm{id}}\big| & & {\scriptstyle \mathrm{id}}\big| & & & & {\scriptstyle \mathrm{id}}\big| & & {\scriptstyle \mathrm{id}}\big| & & {\scriptstyle \mathrm{id}}\big| & & \\
D_0 & \xrightarrow[in_1]{} & D_1 & \xrightarrow[in_2]{} & D_2 & \xrightarrow[in_3]{} & \cdots\cdots & \xrightarrow[in_{n-1}]{} & D_{n-1} & \xrightarrow[in_n]{} & D_n & \xrightarrow[in_{n+1}]{} & D_{n+1} & \xrightarrow[in_{n+2}]{} & \cdots\cdots
\end{array}
$$

を基にして，$\hom(D_j, D_j)$ についてのレトラクト列を作りたい．そのためには，**O1** 圏に課した条件では不足なので，まず，**O1** に条件を補った **O1'** 圏を定める．その後で $\hom(D_j, D_j)$ の射影極限を考えることになるが，その段階では，**O1'** と **O2** の両方の条件を要求した **EA** 圏で議論することになる．

O1 圏では，$\hom(A,B)$ は単なる順序集合であり（それが **O1** の対象だとは主張していない），例えば，$g \in \hom(B,C)$ の定める写像

$$
g_* : f \in \hom(A,B) \mapsto g \circ f \in \hom(A,C)
$$

は，順序集合 $\hom(A,B)$ から順序集合 $\hom(A,C)$ への単調な写像に過ぎない（射として認定しているわけではない）．一方，これから設定する **O1'** 圏では，$\hom(A,B)$ の形の順序集合を対象として考え，g_*, g^* を対象から対象への射として捉えることになる．

1.4.1.2　定義

次の条件を満たす圏 $\mathcal{C}$ を考える；

任意の対象 A, B に対して，$\hom(A, B)$ は順序関係 $\preceq$ が定められた順序集合であり，以下の条件を満たす.

1. （**O1** 圏の条件）
   (a) $f_1, f_2 \in \hom(A, B)$, $g \in \hom(B, C)$ に対して，$f_1 \preceq f_2 \implies g \circ f_1 \preceq g \circ f_2$.
   (b) $g \in \hom(A, B)$, $f_1, f_2 \in \hom(B, C)$ に対して，$f_1 \preceq f_2 \implies f_1 \circ g \preceq f_2 \circ g$.
2. 任意の対象 A, B に対して，$\hom(A, B)$ は $\mathcal{C}$ の対象のひとつとなる.
3. 任意の対象 A, B, A', B' に対して，$\hom(A, B)$ から $\hom(A', B')$ への射は，集合 $\hom(A, B)$ から集合 $\hom(A', A')$ への写像 $F\colon \hom(A, B) \longrightarrow \hom(A', B')$ であり，

$$F_1(f) \preceq F_2(f)\ \ (\forall f \in \hom(A, B)) \quad \Longrightarrow \quad F_1 \preceq F_2.$$

4. (a) $g \in \hom(B, C)$ に対して，$g_* : f \in \hom(A, B) \mapsto g \circ f \in \hom(A, C)$ は射
   (b) $g \in \hom(A, B)$ に対して，$g^* : f \in \hom(B, C) \mapsto f \circ g \in \hom(A, C)$ は射

このような圏 $\mathcal{C}$ を **O1'** 圏ということにする.

Remark.　**O1'** 圏も抽象的な圏なので，射（は単なる矢印のようなものであり，それ）が写像を表しているとは限らない．したがって，A から B への射の集合 $\hom(A, B)$ がその圏の対象となることを要求しただけでは，この形の対象の間の射が常に写像を表しているとは，言い切れない．そのため，これが（集合から集合への）写像であることを，3. で明示的に宣言し，また，順序が「各点的な順序」となっていることを要求している.

Remark.　**O1** 圏を定める最初の段階から，対象は集合であり写像の順序は各点での順序で定められているという標準的設定にしておけば，このような宣言は不要であった．だがここでは，どの段階でどの仮定が必要になるかを明確にするために，条件が複雑になる代償を払ってでも，必要な条件のみを要求することにした.

O1' 圏 $\mathcal{C}$ では，次の補題が成立する.

補題 3. $[p^F, i^F]$ はレトラクト対.

［証明］

1. まず，$\hom(A, A)$, $\hom(B, B)$ は **O1'** 圏の条件 1. により圏 $\mathcal{C}$ の対象.

2. $p^F(g)$ は

$$p^F(g) = p \circ g \circ i = (p_* \circ i^*)(g)$$

と表され，**O1'** 圏の条件 4. により p_*, i^* は射なので，p^F は射の合成として射．同じく，i^F も射．したがって，

(a) p^F は　$\hom(B, B)$ から $\hom(A, A)$ への射．

(b) i^F は　$\hom(A, A)$ から $\hom(B, B)$ への射．

3. (1.11) 式，(1.12) 式により，

$$\begin{aligned} &(p^F \circ i^F)(f) = f \\ &(i^F \circ p^F)(g) \preceq g \end{aligned} \tag{1.13}$$

なので，**O1'** 圏の条件 3. により，

$$p^F \circ i^F = \mathrm{id}_{\hom(A,A)}, \quad i^F \circ p^F \preceq \mathrm{id}_{\hom(B,B)}.$$

よって，$\langle p^F, i^F \rangle$ はレトラクト対．

□

O1 圏 $\mathcal{C}$ に対して $R(\mathcal{C})$ を考えたのと同様に，**O1'** 圏 $\mathcal{C}$ に対しても圏 $R(\mathcal{C})$ を考えることができる．これから，文脈から明らかな場合，これらの圏を特に区別せずに記号 **R** で表すことにする．

以上の結果を圏 **R** の言葉で述べると（３通りの「矢印」の表記を用いてみる），射

$$A \xleftarrow{\ p\ } B\ , \qquad A \xleftarrow{\ p/i\ } B\ , \qquad A \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} B$$

から射

$$\hom(A, A) \xleftarrow{\ p^F\ } \hom(B, B)\ , \quad \hom(A, A) \xleftarrow{\ p^F/i^F\ } \hom(B, B)\ , \quad \hom(A, A) \underset{i^F}{\overset{p^F}{\rightleftarrows}} \hom(B, B)$$

が定められる，ということになる．

圏 **R** の対象 A に圏 **R** の対象 $\hom(A, A)$ を対応させ，圏 **R** の射 p （したがって，圏 $\mathcal{C}$ での Retraction）に圏 **R** の射 p^F （これも，圏 $\mathcal{C}$ での Retraction）を対応させる写像は，圏 **R** から圏 **R** への函手となる．これを踏まえて，この函手を記号 D^F で表すことにする（$\hom(D, D)$ を D^F と表し，これを函手の記号として流用している）．

Remark.　写像 p^F, i^F は，$\hom(A, A)$, $\hom(B, B)$ の monoid としての演算を保たない：

1. (a) id_B については，

$$\begin{aligned} p^F(\mathrm{id}_B) &= p \circ \mathrm{id}_B \circ i \\ &= p \circ i = \mathrm{id}_A \end{aligned}$$

となるのだが，

(b) $f, g \in \hom(B, B)$ に対しての $f \circ g$ は，

$$\begin{aligned} p^F(f) \circ p^F(g) &= (p \circ f \circ i) \circ (p \circ g \circ i) \\ &= p \circ (f \circ (i \circ p) \circ g) \circ i \\ &\preceq p \circ f \circ \mathrm{id}_B \circ g \circ i \\ &= p^F(f \circ g) \end{aligned}$$

となり，p^F での準同形とならない．

(a) $f, g \in \hom(A, A)$ に対しての $f \circ g$ は，

$$\begin{aligned} i^F(f) \circ i^F(g) &= (i \circ f \circ p) \circ (i \circ g \circ p) \\ &= i \circ f \circ (p \circ i) \circ g \circ p \\ &= i \circ f \circ \mathrm{id}_A \circ g \circ p \\ &= i^F(f \circ g) \end{aligned}$$

となるのだが，

(b) id_A については，

$$\begin{aligned} i^F(\mathrm{id}_A) &= i \circ \mathrm{id}_A \circ p = i \circ p \\ &\preceq \mathrm{id}_B \end{aligned}$$

であり，$i^F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_B$ とはならない．

1.4.1.3 レトラクト列 (E_j, pr_j^F, in_j^F) の構成

レトラクト列 (D_j, pr_j, in_j) が与えられているとする．$E_n = \hom(D_n, D_n)$ と置く．

このレトラクト列の各レトラクト対

$$\begin{tikzcd} D_n \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] & D_{n+1} \arrow[l, "pr_n"'] \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"] \\ D_n \arrow[r, "in_{n+1}"'] & D_{n+1} \end{tikzcd}$$

からレトラクト対 $\langle pr_n^F, in_{n+1}^F \rangle$

$$
\begin{tikzcd}
E_n \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] & E_{n+1} \arrow[l, "pr_n^F"'] \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"] \\
E_n \arrow[r, "in_{n+1}^F"'] & E_{n+1}
\end{tikzcd}
$$

を作る操作を各 $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して行うことにより，レトラクト列 (D_j, pr_j, in_j)

$$
\begin{tikzcd}
D_0 \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] & D_1 \arrow[l, "pr_0"'] \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] & D_2 \arrow[l, "pr_1"'] \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] & \cdots\cdots \arrow[l, "pr_2"'] & D_{n-1} \arrow[l, "pr_{n-2}"'] \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] & D_n \arrow[l, "pr_{n-1}"'] \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] & D_{n+1} \arrow[l, "pr_n"'] \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] & \cdots\cdots \arrow[l, "pr_{n+1}"'] \\
D_0 \arrow[r, "in_1"'] & D_1 \arrow[r, "in_2"'] & D_2 \arrow[r, "in_3"'] & \cdots\cdots \arrow[r, "in_{n-1}"'] & D_{n-1} \arrow[r, "in_n"'] & D_n \arrow[r, "in_{n+1}"'] & D_{n+1} \arrow[r, "in_{n+2}"'] & \cdots\cdots
\end{tikzcd}
$$

から レトラクト列 (E_j, pr_j^F, in_j^F)

$$
\begin{tikzcd}
E_0 \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] & E_1 \arrow[l, "pr_0^F"'] \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] & E_2 \arrow[l, "pr_1^F"'] \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] & \cdots\cdots \arrow[l, "pr_2^F"'] & E_{n-1} \arrow[l, "pr_{n-2}^F"'] \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] & E_n \arrow[l, "pr_{n-1}^F"'] \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] & E_{n+1} \arrow[l, "pr_n^F"'] \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] & \cdots\cdots \arrow[l, "pr_{n+1}^F"'] \\
E_0 \arrow[r, "in_1^F"'] & E_1 \arrow[r, "in_2^F"'] & E_2 \arrow[r, "in_3^F"'] & \cdots\cdots \arrow[r, "in_{n-1}^F"'] & E_{n-1} \arrow[r, "in_n^F"'] & D_n \arrow[r, "in_{n+1}^F"'] & E_{n+1} \arrow[r, "in_{n+2}^F"'] & \cdots\cdots
\end{tikzcd}
$$

を構成することができる．

Remark.　圏 $\mathbf{R}$ の言葉で表現すると，

射影列

$$D_0 \xleftarrow{pr_0} D_1 \xleftarrow{pr_1} \cdots\cdots \xleftarrow{pr_{n-1}} D_n \xleftarrow{pr_n} D_{n+1} \xleftarrow{pr_{n+1}} \cdots\cdots$$

に函手 D^F を作用させることにより，射影列

$$E_0 \xleftarrow{pr_0^F} E_1 \xleftarrow{pr_1^F} \cdots\cdots \xleftarrow{pr_{n-1}^F} E_n \xleftarrow{pr_n^F} E_{n+1} \xleftarrow{pr_{n+1}^F} \cdots\cdots$$

を得る

と言うことになる（記号 E_n は使わずに $D_n^F = \hom(D_n, D_n)$ とした方が，函手らしい見かけになる）．

1.4.1.4　上界 (E, π_j^F, ι_j^F) の構成

(D, π_j, ι_j) が レトラクト列 (D_j, pr_j, in_j) の（ひとつの）上界であるとする．なお，添え字を上限に書き分けることは止めて，ι^j は ι_j と表す．このとき，レトラクト列 (E_j, pr_j^F, in_j^F) の上界 (E, π_j^F, ι_j^F) を

1. $E = \hom(D, D)$
2. $\iota_n^F : f_n \in \hom(D_n, D_n) \longmapsto \iota_n \circ f_n \circ \pi_n \in \hom(D, D)$
3. $\pi_n^F : f \in \hom(D, D) \longmapsto \pi_n \circ f \circ \iota_n \in \hom(D_n, D_n)$

として定めると，(E, π_j^F, ι_j^F) は レトラクト列 (E, π_j^F, ι_j^F) の上界となる．射の族 $\{\pi_n^F\}$, $\{\iota_n^F\}$ についての可換性

$$
\begin{aligned}
pr_n \circ \pi_{n+1}^F &= \pi_n^F \\
in_{n+1} \circ \iota_n^F &= \iota_{n+1}^F
\end{aligned}
$$

を確認する必要があるが，これは図式を追跡するだけで簡単に確認できる：

$$
\begin{tikzcd}
 & & & D \arrow[dd, "\pi_n"] \arrow[dddr, "\pi_{n+1}"] & \\
D \arrow[urrr, "f"] & & & & \\
 & & & D_n & \\
D_n \arrow[uu, "\iota_n"] \arrow[urrr, dotted, "f_n"] \arrow[dr, "in_{n+1}"'] & & & & D_{n+1} \arrow[ul, "pr_n"'] \\
 & D_{n+1} \arrow[uuul, "\iota_{n+1}"'] \arrow[urrr, dotted, "f_{n+1}"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

この図式の中で，まず，図式

$$
\begin{tikzcd}
D & \\
D_n \arrow[u, "\iota_n"] \arrow[r, "in_{n+1}"'] & D_{n+1} \arrow[ul, "\iota_{n+1}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
D \arrow[d, "\pi_n"'] \arrow[dr, "\pi_{n+1}"] & \\
D_n & D_{n+1} \arrow[l, "pr_n"]
\end{tikzcd}
$$

は，レトラクト列の上界という仮定により可換．

また，f_n, f_{n+1} の定義により

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "f"] & D \arrow[d, "\pi_n"] \\
D_n \arrow[u, "\iota_n"] \arrow[r, "f_n"'] & D_n
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "f"] & D \arrow[d, "\pi_{n+1}"] \\
D_{n+1} \arrow[u, "\iota_{n+1}"] \arrow[r, "f_{n+1}"'] & D_{n+1}
\end{tikzcd}
$$

も可換．

したがって，

$$
\begin{aligned}
pr_n \circ f_{n+1} \circ in_{n+1} &= pr_n \circ (\pi_{n+1} \circ f \circ \iota_{n+1}) \circ in_{n+1} \\
&= (pr_n \circ \pi_{n+1}) \circ f \circ (\iota_{n+1} \circ in_{n+1}) \\
&= \pi_n \circ f \circ \iota_n \\
&= f_n
\end{aligned}
$$

であり，

$$
pr_n^F \circ \pi_{n+1}^F = \pi_n^F, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.14}
$$

同様に，図式

$$
\begin{tikzcd}
 & & & D \arrow[dlll, dotted, "f"'] \arrow[dd, "\pi_n"'] \arrow[dddr, "\pi_{n+1}"] & \\
D & & & & \\
 & & & D_n \arrow[dlll, "f_n"'] & \\
D_n \arrow[uu, "\iota_n"] \arrow[dr, "in_{n+1}"'] & & & & D_{n+1} \arrow[ul, "pr_n"'] \arrow[dlll, "f_{n+1}"'] \\
 & D_{n+1} \arrow[uuul, "\iota_{n+1}"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

を考えると，

$$
\begin{aligned}
\iota_n^F(f_n) &= \iota_n \circ f_n \circ \pi_n \\
&= (\iota_{n+1} \circ in_{n+1}) \circ f_n \circ (pr_n \circ \pi_{n+1}) \\
&= \iota_{n+1} \circ (in_{n+1} \circ f_n \circ pr_n) \circ \pi_{n+1} \\
&= \iota_{n+1} \circ (in_{n+1}^F(f_n)) \circ \pi_{n+1} \\
&= \iota_{n+1}^F(in_{n+1}^F(f_n)).
\end{aligned}
$$

となるので，

$$
\iota_n^F = \iota_{n+1}^F \circ in_{n+1}^F.
$$

Remark. つまり，函手 D^F はレトラクト列 $(D_j, pr_j/in_j)$ からレトラクト列 $(D_j^F, pr_j^F/in_j^F)$ を作るだけでなく，$(D_j, pr_j/in_j)$ への射の族 $(D, \pi_j/\iota_j)$ から射の族 $(D^F, \pi_j^F/\iota_j^F)$ を作るということ．

1.4.2　圏 EA

次の条件を満たす圏 $\mathcal{C}$ を **EA** 圏と言うことにする．条件 1. は **O1** 圏の条件であり，条件 2. から 4. までは **O1'** 圏として追加された条件，条件 5. は **O2** 圏として追加された条件なので，条件 6. が新たに追加された条件となる．

1. (a) $f_1, f_2 \in \hom(A,B)$, $g \in \hom(B,C)$ に対して，$f_1 \preceq f_2 \implies g \circ f_1 \preceq g \circ f_2$.
   (b) $g \in \hom(A,B)$, $f_1, f_2 \in \hom(B,C)$ に対して，$f_1 \preceq f_2 \implies f_1 \circ g \preceq f_2 \circ g$.
2. 任意の対象 A, B に対して，$\hom(A,B)$ は $\mathcal{C}$ の対象のひとつとなる．
3. 任意の対象 A, B, A', B' に対して，$\hom(A,B)$ から $\hom(A',B')$ への射は，集合 $\hom(A,B)$ から集合 $\hom(A',A')$ への写像 $F\colon \hom(A,B) \longrightarrow \hom(A',B')$ であり，
$$F_1(f) \preceq F_2(f)\ (\forall f \in \hom(A,B)) \quad \implies \quad F_1 \preceq F_2.$$
4. (a) $g \in \hom(B,C)$ に対して，$g_*: f \in \hom(A,B) \mapsto g \circ f \in \hom(A,C)$ は射
   (b) $g \in \hom(A,B)$ に対して，$g^*: f \in \hom(B,C) \mapsto f \circ g \in \hom(A,C)$ は射
5. 対象 A, B と，単調列 $f_1, f_2, \ldots \in \hom(A,B)$ に対して，$\hom(A,B)$ の要素 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ を与える操作 $\lim\limits_{n\to\infty}$ が定められていて，以下の条件を満たす：
   (a) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が単調列ならば
      i. $\lim\limits_{n\to\infty} (g \circ f_n) = g \circ \lim\limits_{n\to\infty} f_n$.
      ii. $\lim\limits_{n\to\infty} (f_n \circ g) = (\lim\limits_{n\to\infty} f_n) \circ g$.
   (b) $\hom(A,B)$ の単調列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，
$$f_n \preceq g_n\ (\forall n \in \mathbb{N}) \implies \lim_{n\to\infty} f_n \preceq \lim_{n\to\infty} g_n.$$
   (c) 単調列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がある番号から先で一定ならば，つまり，
$$f_n = f,\ n = n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots$$
   となる $n_0 \in \mathbb{N}$ と f が存在するならば，
$$\lim_{n\to\infty} f_n = f.$$
6. （追加する条件）
   (a) 添え字 m, n に依存して決まる $f_{mn} \in \hom(A,B)$ が
      i. 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して，$f_{m0}, f_{m1}, f_{m2}, \ldots$ は単調列
      ii. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$f_{0n}, f_{1n}, f_{2n}, \ldots$ は単調列

ならば，

$$\lim_{m\to\infty} f_{mm} = \lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} f_{mn}\right).$$

(b) $E_1 = \mathrm{hom}(A,B)$, $E_2 = \mathrm{hom}(C,D)$ とする．$F_0, F_1, F_2, \ldots \in \mathrm{hom}(E_1, E_2)$ が単調列ならば，任意の $f \in E$ に対して

$$\left(\lim_{n\to\infty} F_n\right)(f) = \lim_{n\to\infty} F_n(f).$$

1.4.3 基本定理

次の定理は，D_n のレトラクト列から $E_n = \mathrm{hom}(D_n, D_n)$ の射影極限を作る基本的な定理である．

定理 1．EA 圏 $\mathcal{C}$ においてレトラクト列 (D_j, pr_j, in_j) が与えられているとする．また．射影列 $D_0 \xleftarrow{pr_0} \cdots \xleftarrow{pr_{n-1}} D_n \xleftarrow{pr_n} D_{n+1} \xleftarrow{pr_{n+1}} \cdots$ の射影極限 D が与えられているとする．このとき，$E_n = \mathrm{hom}(D_n, D_n)$, $E = \mathrm{hom}(D, D)$ と置くと，E は，射影列 $E_0 \xleftarrow{pr_0^F} E_1 \xleftarrow{pr_1^F} E_2 \xleftarrow{pr_2^F} \cdots\cdots$ の射影極限となる．

［証明］ D は射影極限なので，レトラクト列 (D_j, pr_j, in_j) の $R(\mathcal{C})$ における上界 (D, π_j, ι_j) となり（命題 2），命題 3 により，

$$\lim_{n\to\infty} (\iota_n \circ \pi_n) = \mathrm{id}_D$$

である．

$\lim_{m\to\infty} f_{mm} = \lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} (f_{mn})\right)$ であること（圏 **EA** での条件 6 の (a)）を用いて，$\lim_{m\to\infty} (\iota_m^F \circ \pi_m^F)$ を計算する；

任意の $f \in E = \mathrm{hom}(D, D)$ に対して，

$$\begin{aligned}(\iota_m^F \circ \pi_m^F)(f) &= \iota_m \circ (\pi_m \circ f \circ \iota_m) \circ \pi_m \\ &= (\iota_m \circ \pi_m) \circ f \circ (\iota_m \circ \pi_m)\end{aligned}$$

であり，補題 2 により $\iota_n \circ \pi_n$ は n について単調増加なので，

$$\begin{aligned}\left(\lim_{m\to\infty} (\iota_m^F \circ \pi_m^F)\right)(f) &= \lim_{m\to\infty} \left((\iota_m^F \circ \pi_m^F)(f)\right) \quad (\Leftarrow \text{圏 } \mathbf{EA} \text{ の条件 6 の (b)}) \\ &= \lim_{m\to\infty} ((\iota_m \circ \pi_m) \circ f \circ (\iota_m \circ \pi_m))\end{aligned}$$

一方，

$$
\begin{aligned}
f &= f \circ \mathrm{id}_D \\
&= f \circ \lim_{n\to\infty}(\iota_n \circ \pi_n) \\
&= \lim_{n\to\infty}(f \circ (\iota_n \circ \pi_n)) \\
&= \mathrm{id}_D \circ \lim_{n\to\infty}(f \circ (\iota_n \circ \pi_n)) \\
&= \Bigl(\lim_{m\to\infty}(\iota_m \circ \pi_m)\Bigr) \circ \Bigl(\lim_{n\to\infty}(f \circ (\iota_n \circ \pi_n))\Bigr) \\
&= \lim_{m\to\infty}\Bigl((\iota_m \circ \pi_m) \circ \lim_{n\to\infty}(f \circ (\iota_n \circ \pi_n))\Bigr) \\
&= \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}((\iota_m \circ \pi_m) \circ f \circ (\iota_n \circ \pi_n)) \quad \text{（ 圏 }\mathbf{EA}\text{ の条件 6 の (a) により}\downarrow\text{）} \\
&= \lim_{m\to\infty}((\iota_m \circ \pi_m) \circ f \circ (\iota_m \circ \pi_m))
\end{aligned}
$$

なので，

$$
\Bigl(\lim_{m\to\infty}(\iota_m^F \circ \pi_m^F)\Bigr)(f) = f.
$$

$f \in E$ は任意なので，$\lim_{n\to\infty}(\iota_n^F \circ \pi_n^F) = \mathrm{id}_E$. したがって，最後にもう一度補題 2 を用いることにより，E が射影極限であることがわかる． □

圏 $\mathbf{R}$ に言い換えると，

> 圏 $\mathbf{R}$ において函手 D^F は，レトラクト列 (D_j, pr_j, ι_j) の射影極限 (D, π_j, ι_j) を，
> レトラクト列 (D_j^F, pr_j^F, in^R, j) の射影極限 $(D^F, \pi_j^F, \iota_j^F)$ に写す

ということであり，最初に射影極限 D を求めてから $\hom(D, D)$ を作ると，それは，各 D_n に対して $\hom(D_n, D_n)$ を作ってから射影極限を作ったものとなっていることを示している．つまり，射影極限をとる操作と函手 D^F : $A \mapsto \hom(A, A)$ は可換．

第2章　Models

2.1　D.Scott の D_∞

EA 圏 $\mathcal{C}$ において，$\hom(D_\infty, D_\infty)$ と D_∞ が同型になるような対象 D_∞ を構成する．

2.1.0.1　レトラクト対の延長

圏 **EA** において，A は任意の対象, $B = \hom(A, A)$ であり †，A と B の間のレトラクト対 $\langle p, i\rangle$ が与えられているとする：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] & B \arrow[l, "p"'] \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"] \\ A \arrow[r, "i"'] & B \end{tikzcd} \qquad B = \hom(A, A), \quad p \circ i = \mathrm{id}_A,\ i \circ p \preceq \mathrm{id}_B$$

Remark.† 　$B = \hom(A, A)$ と選んでいることが，これからの構成の核心となる．

$B = \hom(A, A)$ としたのだが，さらに，$C = \hom(B, B)$ と置く．

1. $f \in B = \hom(A, A)$ に対して，

   $$i^F(f) = i \circ f \circ p$$

   と置くと，$i^F(f) \in \hom(B, B) = C$ であり，i^F は B から $C = \hom(B, B)$ への射．

   $$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & B \arrow[l, "p"'] \arrow[d, dotted, "i^F(f)"] & \\ A \arrow[r, "i"'] & B \arrow[r, "i^F"'] & C \end{tikzcd}$$

2. $g \in C = \hom(B, B)$ に対して，

   $$p^F(g) = p \circ g \circ i$$

と置くと，$p^F(g) \in \hom(A,A) = B$ であり，p^F は $C = \hom(B,B)$ から $B = \hom(A,A)$ への射．

$$\begin{tikzcd} A & B \arrow[l, "p"'] & C \arrow[l, "p^F"'] \\ A \arrow[u, dotted, "p^F(g)"] \arrow[r, "i"'] & B \arrow[u, "g"'] & \end{tikzcd}$$

3. $p^F \circ i^F = \mathrm{id}_B$,　$i^F \circ p^F \preceq \mathrm{id}_C$ であり，(p^F, i^F) はレトラクト対になる．

$$\begin{tikzcd} A & B \arrow[l, "p"'] & C \arrow[l, "p^F"'] \\ A \arrow[u, dash, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "i"'] & B \arrow[u, dash, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "i^F"'] & C \arrow[u, dash, "\mathrm{id}"] \end{tikzcd}$$

以上により，与えられたレトラクト対

$$\begin{tikzcd} A & B \arrow[l, "p"'] \\ A \arrow[u, dash, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "i"'] & B \arrow[u, dash, "\mathrm{id}"'] \end{tikzcd} \qquad B = \hom(A,A), \quad p \circ i = \mathrm{id}_A,\ i \circ p \preceq \mathrm{id}_B$$

の右側にレトラクト対 (p^F, i^F) を付け加えて延長する操作を得たことになる．

$$\begin{tikzcd} A & B \arrow[l, "p"'] & C \arrow[l, "p^F"'] \\ A \arrow[u, dash, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "i"'] & B \arrow[u, dash, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "i^F"'] & C \arrow[u, dash, "\mathrm{id}"] \end{tikzcd} \qquad C = \hom(B,B), \quad p^F \circ i^F = \mathrm{id}_B,\ i^F \circ p^F \preceq \mathrm{id}_C$$

2.1.0.2　構成の前提

D_0 は任意の対象，$D_1 = \hom(D_0, D_0)$ として，レトラクト対 $\langle pr_0, in_1 \rangle$ が与えられているとする．

$$\begin{tikzcd} D_0 & D_1 \arrow[l, "pr_0"'] \\ D_0 \arrow[u, dash, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "in_1"'] & D_1 \arrow[u, dash, "\mathrm{id}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{rcl} pr_0 \circ in_1 & = & \mathrm{id}_0 \\ in_1 \circ pr_0 & \preceq & \mathrm{id}_1 \end{array}$$

これを前提として，$D_{n+1} = \hom(D_n, D_n)$ となるレトラクト列 (D_j, pr_j, in_j) を再帰的に構成する：

2.1.0.3 再帰的構成

D_n まで構成されているとする．つまり，図式

$$\begin{tikzcd}
D_0 \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] & D_1 \arrow[l, "pr_0"'] \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] & \cdots\cdots \arrow[l, "pr_1"'] & D_{n-2} \arrow[l, "pr_{n-3}"'] \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] & D_{n-1} \arrow[l, "pr_{n-2}"'] \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] & D_n \arrow[l, "pr_{n-1}"'] \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] \\
D_0 \arrow[r, "in_1"'] & D_1 \arrow[r, "in_2"'] & \cdots\cdots \arrow[r, "in_{n-2}"'] & D_{n-2} \arrow[r, "in_{n-1}"'] & D_{n-1} \arrow[r, "in_n"'] & D_n
\end{tikzcd}$$

の対象と射が定められていて，$j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ に対して

$$D_{j+1} = \hom(D_j, D_j), \qquad pr_j \circ in_{j+1} = \mathrm{id}_j,\ in_{j+1} \circ pr_j \preceq \mathrm{id}_{j+1}$$

となっているとする．

このとき，図式の最後のレトラクト対

$$\begin{tikzcd}
D_{n-1} \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] & D_n \arrow[l, "pr_{n-1}"'] \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] \\
D_{n-1} \arrow[r, "in_n"'] & D_n
\end{tikzcd}$$

を右に延長する操作，つまり，$D_{n+1} = \hom(D_n, D_n)$,

$$\begin{array}{rcl}
pr_n : g \in D_{n+1} & \mapsto & pr_{n-1} \circ g \circ in_n \in D_n \\
in_{n+1} : f \in D_n & \mapsto & in_n \circ f \circ pr_{n-1} \in D_{n+1}
\end{array}$$

と定め図式

$$\begin{tikzcd}
D_{n-1} \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] & D_n \arrow[l, "pr_{n-1}"'] \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] & D_{n+1} \arrow[l, "pr_n"'] \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] \\
D_{n-1} \arrow[r, "in_n"'] & D_n \arrow[r, "in_{n+1}"'] & D_{n+1}
\end{tikzcd}$$

を得る操作を再帰的に行うことにより，条件 $D_{j+1} = \hom(D_j, D_j)$ を満たすレトラクト列

$$\begin{tikzcd}
D_0 \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] & D_1 \arrow[l, "pr_0"'] \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] & \cdots\cdots \arrow[l, "pr_1"'] & D_{n-2} \arrow[l, "pr_{n-3}"'] \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] & D_{n-1} \arrow[l, "pr_{n-2}"'] \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] & D_n \arrow[l, "pr_{n-1}"'] \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] & \cdots \arrow[l, "pr_n"'] \\
D_0 \arrow[r, "in_1"'] & D_1 \arrow[r, "in_2"'] & \cdots\cdots \arrow[r, "in_{n-2}"'] & D_{n-2} \arrow[r, "in_{n-1}"'] & D_{n-1} \arrow[r, "in_n"'] & D_n \arrow[r, "in_{n+1}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

を作ることができる．

圏 $\mathcal{C}$ において，この構成により作られた射影列 $(\{D_j\}, \{pr_j\})$ の射影極限が存在するならば，それを D_∞ と表すことにする．

2.1.0.4　定理

最初に，射影列の定義を少しだけ広く解釈しておく（添え字の付け替えとして解釈すれば済むのだが，記述は煩雑になる）；一般に，射影列

$$D_0 \xleftarrow{p_0} D_1 \xleftarrow{p_1} D_1 \xleftarrow{p_2} \cdots$$

への射の族 $f_0, f_1, f_2, \ldots$ が与えられている場合，そこから f_0 を捨てるだけで，

$$D_1 \xleftarrow{p_1} D_1 \xleftarrow{p_2} \cdots$$

への射の族 $f_1, f_2, \ldots$ を作ることができる．逆に，$f_1, f_2, \ldots$ に $f_0 = p_0 \circ f_1$ を付け加えるだけで，D_0 から始まる射影列への射の族を作ることができる．また，D_1 から始まる射影列の上界 D, $\pi_1, \pi_2, \ldots$ は $\pi_0 = p_0 \circ \pi_1$ と定めることにより D_0 から始まる射影列の上界になるし，また，一意性や不等号についての簡約性についても同様．したがって，射影列の上界，上限，射影極限は，D_0 から始まると射影列についても，D_0 を捨てて D_1 から始まるとした射影列についても同じことである．

これから，D_0 を捨てて D_1 から始まるとした場合についても，D_0 から始まる場合と特に区別せずに，射影極限などの用語を用いることにする．

定理 2. **EA** 圏 $\mathcal{C}$ において，D_0 は任意の対象，$D_1 = \hom(D_0, D_0)$ として，レトラクト対 $\langle pr_0, in_1 \rangle$ が与えられているとする．これを延長して，条件 $D_{j+1} = \hom(D_j, D_j)$ を満たすレトラクト列

$$\begin{tikzcd}
D_0 \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] & D_1 \arrow[l, "pr_0"'] \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] & \cdots\cdots \arrow[l, "pr_1"'] & D_{n-2} \arrow[l, "pr_{n-3}"'] \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] & D_{n-1} \arrow[l, "pr_{n-2}"'] \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] & D_n \arrow[l, "pr_{n-1}"'] \arrow[d, dash, "\mathrm{id}"'] & \cdots \arrow[l, "pr_n"'] \\
D_0 \arrow[r, "in_1"'] & D_1 \arrow[r, "in_2"'] & \cdots\cdots \arrow[r, "in_{n-2}"'] & D_{n-2} \arrow[r, "in_{n-1}"'] & D_{n-1} \arrow[r, "in_n"'] & D_n \arrow[r, "in_{n+1}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

を作る．射影列 $(\{D_j\}, \{pr_j\})$ の射影極限 D_∞ が存在するならば，D_∞ と $\hom(D_\infty, D_\infty)$ は同型．

［証明］

1. 定理 1 により，$\hom(D_\infty, D_\infty)$ は射影列 $(\{\hom(D_j, D_j)\}, \{pr_j^F\})$ の射影極限のひとつとなる．
2. D_∞ は射影列

   $$D_1 \xleftarrow{pr_1} D_2 \xleftarrow{pr_2} D_3 \xleftarrow{pr_3} \cdots$$

   の射影極限でもあり，
3. $\hom(D_j, D_j) = D_{j+1}$,　$pr_j^F = pr_{j+1}$. なので，
4. D_∞ は射影列 $(\{\hom(D_j, D_j)\}, \{pr_j^F\})$ の射影極限．
5. 以上により，$\hom(D_\infty, D_\infty)$ と D_∞ は同型．

$\square$

2.2 $\mathcal{P}_\omega$ モデル

2.2.1 順序集合としての $\mathcal{P}(S)$

2.2.1.1 $\mathcal{P}(S)$ の部分集合

集合 S のべき集合（すべての部分集合の集合）を $\mathcal{P}(S)$, S のすべての有限部分集合（空集合も含む）の作る集合を $\mathcal{P}_0(S)$ と表すことにする；

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(S) &= \{x \mid x \subset S\}, \\ \mathcal{P}_0(S) &= \{x \in \mathcal{P}(S) \mid x \text{ は有限集合}\}. \end{aligned}$$

S の部分集合からなる集合 $A \subset \mathcal{P}(S)$ に対して，$\bigcup A$ は，A に属する部分集合 a すべての和集合を表す；

$$\bigcup A = \{s \in S \mid \exists a \in A : s \in a\}. \tag{2.1}$$

Remark. $\exists a \in A : \cdots\cdots$ は，

$\cdots\cdots$ となる $a \in A$ が存在する，　　$a \in A$ が存在して条件 $\cdots\cdots$ を満たす

ということを表す．なるべくなら，このような表記は避けて普通の文で表現したいところだが，これから先，なにかと紛らわしい状況が多くなるので，このような記号を用意しておく．

例 1. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{\{3, 6\}, \{2, 4, 6\}\}$ とする．

1. S の部分集合は（空集合と全体集合も含めて）2^6 個あるので，
2. $\mathcal{P}(S)$ は 64 個要素をもつ集合．
3. $\mathcal{P}(S)$ の部分集合 A は 2 個の要素を持つ．
4. $\bigcup A = \{3, 6\} \cup \{2, 4, 6\} = \{2, 3, 4, 6\}$.

A が，添え字集合を J とする集合族 $\{A_j\}_{j \in J}$ として与えられているときは，

$$\bigcup A = \bigcup_{j \in J} a_j \tag{2.2}$$

と表すこともできる．例えば，上の例で $a_1 = \{3, 6\}$, $a_2 = \{2, 4, 6\}$, $J = \{1, 2\}$ と置くと，

$$\bigcup_{j \in J} a_j = a_1 \cup a_2 = \{3, 6\} \cup \{2, 4, 6\} = \{2, 3, 4, 6\}.$$

この発想を A が単なる部分集合のときにも当てはめて，

$$\bigcup A = \bigcup_{a \in A} a \tag{2.3}$$

と表しても良い．

(2.2) 式，(2.3) 式については ⇒ Appendix 4.1.0.1.

2.2.1.2 poset $(\mathcal{P}(S), \sqsubset)$

任意の集合 S に対して，$\mathcal{P}(S)$ の順序関係 $\preceq$ を包含関係 $\subset$ により定める；

$$x_1 \preceq x_2 \iff x_1 \subset x_2, \qquad x_1, x_2 \in \mathcal{P}(S).$$

記号 $\subset$ の代わりに，記号 $\sqsubset$ を用いても良いことにする．

Remark. $\mathcal{P}(S)$ の順序関係は，集合としての S の性質のみから決まり，また， poset として要求されている以上の集合論的性質を豊富に持つので，順序関係一般を表すために用いてきた記号 $\preceq$ とは違う記号を用いたい．ここでは記号 $\sqsubset$ を，

包含関係を順序関係として見ていること

を明示したい場合に用いることにする．したがって，$a \subset b$ と $a \sqsubset b$ は，数学的には同じ．
一般の順序関係を記号 $\sqsubset$ で表すことはしない．あくまでも，$\sqsubset$ は数学的には $\subset$ と同じ記号として扱う．

$(\mathcal{P}(S), \sqsubset)$ において，$A \subset \mathcal{P}(S)$ に対しての上限 $\sup A$ は常に存在し，A に属するすべての a の和集合となる；

$$\sup A = \bigcup A. \tag{2.4}$$

したがって，空でない任意の集合 S に対して，$(\mathcal{P}(S), \sqsubset)$ は $\emptyset$ を最小元とする完備束となる（ので，dcpo となる）．

一応，(2.4) 式の証明を書いてみる；

1. 各 $a \in A$ に対して，$a \sqsubset \bigcup A$ であり（$\bigcup A$ は A の上界であり），
2. $b \in \mathcal{P}(S)$ が任意の $a \in A$ に対して $a \sqsubset b$ となっているならば（b が A の上界ならば），$\bigcup A \sqsubset b$ （したがって，$\bigcup A$ は最小の上界）．

Remark. (2.1) 式の形で “∃” を用いた証明は ⇒ Appendix 4.1.0.2. さすがに，これはやり過ぎ．

2.2.1.3　コンパクト

$(\mathcal{P}(S), \sqsubset)$ は完備束なのだが，$\mathcal{P}_0(S)$ との関係で，有向集合という概念は，やはり本質的な役割を果たす；

補題 4. S を空でない集合として $X = \mathcal{P}(S),\ X_0 = \mathcal{P}_0(S)$ と置く．A は poset $(X, \sqsubset)$ の有向部分集合であるとする．このとき，任意の $x_0 \in X_0$ に対して，

$$x_0 \sqsubset \bigcup A \implies \exists a \in A : x_0 \sqsubset a\,.$$

［証明］　$x_0 \in \mathcal{P}_0(S),\ x_0 \subset \bigcup A$ とする．

1. $x_0 = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$ と表しておくと，
2. 各 s_j に対して，$s_j \in x_0 \subset \bigcup A$ なので，$s_j \in a$ となる $a \in A$ が存在する．そのような a をひとつ選び a_j と表しておく；したがって，$s_j \in a_j,\ j = 1, 2, \ldots, n.$
3. A は有向なので，これらの $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対して $a_j \sqsubset a,\ j = 1, 2, \ldots, n$ となる $a \in A$ が存在し，
4. $s_j \in a,\ j = 1, 2, \ldots, n$ となるので，$x_0 \sqsubset a.$

$\square$

Remark.　3. の部分の証明は，

1. $a_j \subset a',\ j = 1, 2, \ldots, k$ となる $a' \in A$ が存在すると仮定（帰納法の仮定）．
2. A は有向なので，a' と a_{k+1} に対して $a' \subset a'',\ a_{k+1} \subset a''$ となる $a'' \in A$ が存在し，
3. $a_j \subset a'',\ j = 1, 2, \ldots, k+1.$

という形の帰納法を用いれば良い．ただし，これは有向集合の基本的な性質であり，「有限個の $a_1, \ldots, a_k \in A$ に対して $a_j \preceq a$ となる $a \in A$ が存在する」を有向集合の定義としておいても良い．

一般に，X は空でない集合，$(X, \preceq)$ は poset として，$x_0 \in X$ が**コンパクト** (compact) であることを，

A が X の有向部分集合であって $x_0 \preceq \sup A$ となっているならば，$x_0 \preceq a$ となる $a \in A$ が存在する

と定義する．

補題 4 は，

$(\mathcal{P}(S), \sqsubset)$ において，S の有限部分集合はコンパクト

と言い換えることができる．

コンパクトという用語については，$\Rightarrow$ Appendix 4.2.0.3

2.2.2 写像

2.2.2.1 値 $h(a)$ と 像 $h\langle a\rangle$，あるいは，値 $H(a)$

空でない 2 つの集合 U, V が与えられているとする．

これは典型的な「集合と写像」の演習問題だが，$h : U \longrightarrow V,\ a, a' \subset U$ に対して，

1. $a \subset a' \implies h(a) \subset h(a')$.
2. $h(a \cup a') = h(a) \cup h(a')$

となる（ただし，$h(a \cap a') = h(a) \cap h(a')$ が成立するとは限らない）．

2 つの部分集合 $a, a' \in \mathcal{P}(U)$ に限らず（つまり，2 個の部分集合から成る集合 $\{a, a'\} \subset \mathcal{P}(U)$ に限らず，任意個の）部分集合の集合 $A \subset \mathcal{P}(U)$ に対しても，

$$h\left(\bigcup A\right) = \bigcup_{a \in A} h(a) \tag{2.5}$$

となる．証明は，

1. 任意の $a \in A$ に対して $a \subset \bigcup A$ なので，$h(a) \subset h\left(\bigcup A\right)$ であり，$\bigcup_{a\in A} h(a) \subset h\left(\bigcup A\right)$.
2. $v \in h\left(\bigcup A\right)$ とすると，
   (a) $v = h(u)$ となる $u \in \bigcup A$ が存在する．
   (b) この u に対して $u \in a$ となる $a \in A$ が存在し，この a に対して $v \in h(a)$ となり，
   (c) $v \in \bigcup_{a\in A} h(a)$

   したがって，$h\left(\bigcup A\right) \subset \bigcup_{a\in A} h(a)$.

□

Remark. (2.5) 式は，

$$h\left(\bigcup_{a \in A} a\right) = \bigcup_{a \in A} h(a) \tag{2.6}$$

と書くこともできる（この方が分かりやすい）．

$h : U \longrightarrow V$ により，U の部分集合 a（言い換えると，$a \in \mathcal{P}(U)$）に対して V の部分集合 $h(a)$（言い換えると $h(a) \in \mathcal{P}(V)$）を対応される写像 H が決まる；

$$H : \mathcal{P}(U) \longrightarrow \mathcal{P}(V), \qquad H : a \in \mathcal{P}(U) \mapsto h(a) \in \mathcal{P}(V).$$

Remark. この定義により，$h(a) = H(a)$ $(\forall a \in \mathcal{P}(U))$ となるが，h は U から V への写像であり，H は $\mathcal{P}(U)$ から $\mathcal{P}(V)$ への写像なので，異なる記号 h, H を用いている．すべての a で一致しているのだから同じ記号を使うべき，という気持ちもわかる．しかし，$h(a)$ は a の像であって h による値ではない．

Remark. 「どこからどこへの関数なのか」を重視する現代数学の感性から，「引数に対しての値を計算する」という感性に戻るならば，h と別の記号 H は使わない方が自然．$\mathcal{P}(U)$ の要素が引数と言わずに，U の部分集合が引数（でありその像を計算する）と言えば良いだけのこと．必要ならば，最後に「現代数学での写像」に言い換えれば良い …… ただし，混乱なく切り抜けられる場合には，だが．

値なのか像なのか，混乱する場合も在ることを前提として，$h(a)$ が写像 $h : U \longrightarrow V$ による $a \subset U$ の像であることを明示したい場合には，記号を少しだけ変えて

$$f\langle a \rangle$$

と表すことにしておく．

(2.6) 式を書き直すと，

$$h\left\langle \bigcup_{a \in A} a \right\rangle = \bigcup_{a \in A} h\langle a \rangle. \tag{2.7}$$

記号を少しだけ変えた影響も，この式では目立ちすぎで，しかも見栄えが悪いのだが，混乱するよりはまし．

像の記号については ⇒ Appendix 4.2.0.2.

2.2.2.2 各点の順序

X, V を空でない集合として，$f_1, f_2 \in \mathrm{Map}(X, \mathcal{P}(V))$ に対して，

$$f_1 \preceq f_2 \iff f_1(x) \sqsubset f_2(x) \quad (\forall x \in X)$$

と定め，これを $\mathrm{Map}(X, \mathcal{P}(V))$ の各点の順序と言うことにする．

この順序は，集合としての X,V のみから決まるので（特に X は「すべての x に対して」という領域を指定しているに過ぎない），$f_1 \preceq f_2$ も，この関係が集合としての X, V のみから決まることを考慮して，$f_1 \sqsubset f_2$ と書くことにする．

命題 4. U, V は空でない集合とする．任意の写像 $h \in \mathrm{Map}(U, V)$ に対して，

$$H : \mathcal{P}(U) \longrightarrow \mathcal{P}(V), \quad H(a) = h\langle a\rangle$$

は連続写像．

［証明］　任意の有向部分集合 $A \subset \mathcal{P}(U)$ に対して，

- $(\mathcal{P}(U), \sqsubset)$ での $A \subset \mathcal{P}(U)$ の上限 $\sup A$ は $\bigcup A$ であり，
- $(\mathcal{P}(V), \sqsubset)$ での $H\langle A\rangle$ の上限は $\bigcup_{a\in A} H(a) = \bigcup_{a\in A} h\langle a\rangle$

なので，(2.7) 式は H が連続であることを保証している；

$$\begin{aligned} H(\sup A) &= H\left(\bigcup_{a\in A} a\right) && (\ H \text{ の定義により} \downarrow) \\ &= h\left\langle \bigcup_{a\in A} a \right\rangle && (\ (2.7) \text{ 式により} \downarrow) \\ &= \bigcup_{a\in A} h\langle a\rangle = \sup H(A). \end{aligned}$$

□

Remark.　この証明に現れる記号を整理しておくと，

1. h は U から V への写像．$h\langle a\rangle$ は $a \subset U$ の像；$h\langle a\rangle = \{h(u) \mid u \in a\}$.
2. H は $\mathcal{P}(U)$ から $\mathcal{P}(V)$ への写像．$H(a)$ は $a \in \mathcal{P}(U)$ の値．$H(a) = h\langle a\rangle$.
3. $H\langle A\rangle$ は，$A \subset \mathcal{P}(U)$ の像；$H\langle A\rangle = \{H(a) \mid a \in A\}$.

さすがに，h と H を同じ記号で済ますと，混乱しそう．

Remark.　連続写像の定義

dcpo X から dcpo Y への写像 f は，X の任意の有向部分集合 A に対して

$$f(\sup A) = \sup_{a\in A} f(a)$$

となるとき，連続写像

は変更しない．$\mathcal{P}(U)$, $\mathcal{P}(V)$ は完備束なので，有向部分集合という条件を避けることもできるが，一般論との折り合いが悪くなるだけでメリットは少ない．

$h : U \longrightarrow V$ から定まる写像 $H(a) = h\langle a\rangle$ を，$\mathcal{P}(h)$ と表すことにする；

$$\mathcal{P}(h) : \mathcal{P}(U) \longrightarrow \mathcal{P}(V), \quad (\mathcal{P}(h))(a) = h\langle a\rangle.$$

Remark. $\mathcal{P}$ は，集合の圏から dcpo の圏への函手となる．

2.2.3 直積 $X_0 \times T$ のべき集合

X_0 と T を空でない集合として，積集合 $X_0 \times T$ を考える．

2.2.3.1 記号

$a \in X_0$ と $b \in \mathcal{P}(T)$ に対して，

$$\langle a|b = \{\langle a, t\rangle \mid t \in b\}$$

と定める（$\Rightarrow$ Appendix 4.1.0.4）．

$a \in X_0$ に対して，a-slit を，“X_0-座標が a のスリット” として定める；

$$a\text{-slit} = \{\langle a, t\rangle \mid t \in T\}$$

$\langle a|$ は，T から a-slit への「平行移動」（というイメージ）であり，$\mathcal{P}(T)$ から $\mathcal{P}(a\text{-slit})$ への順序同型（順序，この場合は包含関係，を保つ全単射）となる．

したがって，$B \subset \mathcal{P}(t)$ に対して，

$$\langle a| \bigcup_{b\in B} b = \bigcup_{b\in B} \langle a|b \tag{2.8}$$

となる．

Remark. また，$\langle a|b$ を

T から a-slit への写像 $t \mapsto \langle a, t\rangle$ による像

と考えれば，つまり，$\langle a, t\rangle$ を $\langle a|t$ と表しても良いことにして関数 $\langle a| : t \mapsto \langle a|t$ を定めていると考えれば，これは，h と H で同じ記号を用いている場合であり，等式 (2.8) は等式 (2.7) に帰着する．

2.2.3.2 func(c) と graph(f)

1. $c \subset X_0 \times T$ を固定しておく．$a \in X_0$ に対して，

   $X_0 \times T$ の部分集合 c を a-slit で観察した "T-座標"

   を，$\mathrm{scan}_c(a)$ と表すことにする；

   $$\mathrm{scan}_c(a) \overset{\mathrm{def}}{=} \{t \in T \mid \langle a, t\rangle \in c\}.$$

   (a) X_0 から $\mathcal{P}(T)$ への写像 scan_c を，

   $$\mathrm{scan}_c : a \in X_0 \longmapsto \mathrm{scan}_c(a) \in \mathcal{P}(T).$$

   と定める．

   (b) $c \subset X_0 \times T$ は，この「断層撮影」の合成を行うことにより復元できる；

   $$c = \bigcup_{a \in X_0} \langle a | \mathrm{scan}_c(a).$$

   $\mathrm{scan}_c(a)$ は「断層撮影」をしたときの a-slit での「写真」であり，$\langle a|\mathrm{scan}_c(a)$ は，a-slit での c の断面に相当する；

   $$\langle a|\mathrm{scan}_c(a) = a\text{-slit} \cap c.$$

2. scan_c は X_0 から $\mathcal{P}(T)$ への写像なので，scan_c を func(c) と表すことにすると，

   $$\mathrm{func} : c \in \mathcal{P}(X_0 \times T) \longmapsto \mathrm{func}(c) \in \mathrm{Map}(X_0, \mathcal{P}(T)).$$

3. 逆に，$f \in \mathrm{Map}(X_0, \mathcal{P}(T))$ が与えられると，

   $$\begin{aligned} c &= \bigcup_{a \in X_0} \{\langle a, t\rangle \mid t \in f(a)\} \\ &= \bigcup_{a \in X_0} \langle a | f(a) \end{aligned}$$

   と置くことにより，$\mathrm{func}(c) = f$ となる c を一意に定めることができる．f に対して定まるこの部分集合 $c \in \mathcal{P}(X_0 \times T)$ を，graph(f) と表すことにする；

   $$\mathrm{graph}(f) = \bigcup_{a \in X_0} \langle a | f(a) \tag{2.9}$$

   $$\mathrm{graph} : f \in \mathrm{Map}(X_0, \mathcal{P}(T)) \longmapsto \mathrm{graph}(f) \in \mathcal{P}(X_0 \times T)$$

4. $\mathrm{graph}(\mathrm{func}(c)) = c$, $\mathrm{func}(\mathrm{graph}(f)) = f$ となるので，graph と func は互いの逆写像.

Remark. $f \in \mathrm{Map}(X_0, \mathcal{P}(T))$ の graph(f) は，

- 数学一般での定義では（“∃” を用いて表すと）

$$\mathrm{graph} = \{\langle x, b\rangle \in X_0 \times \mathcal{P}(T) \mid \exists a \in X_0 :\, x = a,\ b = f(a)\ \}, \tag{2.10}$$

- ここでの定義は，

$$\mathrm{graph}(f) = \{\langle x, t\rangle \in X_0 \times T \mid \exists a \in X_0 :\, x = a,\ t \in f(a)\ \} \tag{2.11}$$

であり，a と $f(a)$ のペア $\langle a, f(a)\rangle$ を作るか，$f(a)$ を “unpack” してから a とのペアとしたものを “pack” して $\langle a|f(a)$ を作るか，という点で，両者は異なる．なお，(2.10) 式を「断層撮影の合成」として表すならば，

$$\mathrm{graph}(f) = \bigcup_{a \in X_0} \{\langle a, f(a)\rangle\} \quad (\Leftarrow 1\ \text{点集合の合成}),$$

となる．(2.11) 式の場合は，(2.9) 式．

次に，graph, func の連続性について調べる．

1. $\mathcal{P}(X_0 \times T)$ の部分集合 C が与えられたとして，$\gamma = \bigcup C\ (= \sup C)$ と置く．任意の $a \in X_0$ に対して，

$$\begin{aligned}
\langle a| \big(\mathrm{scan}_\gamma(a)\big) &= a\text{-slit} \cap \gamma = a\text{-slit} \cap \bigcup_{c \in C} c, \\
\langle a| \big(\mathrm{scan}_c(a)\big) &= a\text{-slit} \cap c, \quad (\forall c \in C\,)
\end{aligned}$$

なので，

$$\begin{aligned}
\langle a| \big(\mathrm{scan}_\gamma(a)\big) &= \bigcup_{c \in C} \Big(a\text{-slit} \cap c\Big), && (\Leftarrow \text{集合の分配律}) \\
&= \bigcup_{c \in C} \langle a| \big(\mathrm{scan}_c(a)\big), && (\ (2.8)\ \text{式により} \downarrow) \\
&= \langle a| \bigcup_{c \in C} \Big(\mathrm{scan}_c(a)\Big).
\end{aligned}$$

したがって，

$$\mathrm{scan}_\gamma(a) = \bigcup_{c \in C} \Big(\mathrm{scan}_c(a)\Big)$$

であり，

$$\mathrm{scan}_\gamma(a) = \mathrm{func}(\gamma)(a), \qquad \mathrm{scan}_c(a) = \mathrm{func}(c)(a)$$

なので，

$$\begin{aligned}\mathrm{func}(\gamma)(a) &= \bigcup_{c\in C}\bigl(\mathrm{func}(c)(a)\bigr) \qquad (\text{ 写像の集合の上限は各点での上限なので}\downarrow) \\ &= \Bigl(\sup_{c\in C}\mathrm{func}(c)\Bigr)(a).\end{aligned}$$

$a \in X_0$ は任意なので，

$$\mathrm{func}(\sup C) = \mathrm{func}(\gamma) = \sup_{c\in C}\mathrm{func}(c)$$

であり，func は連続．

2. $F \subset \mathrm{Map}(X_0, \mathcal{P}(T))$ が与えられたとして，$\varphi = \sup\, F$ と置く．任意の $a \in X_0$ に対して，写像の集合の上限は各点での上限なので，

$$\varphi(a) = \bigcup_{f\in F} f(a)$$

であり，

$$\begin{aligned}\mathrm{graph}(\varphi) &= \bigcup_{a\in X_0}\langle a|\,\varphi(a) \\ &= \bigcup_{a\in X_0}\langle a|\left(\bigcup_{f\in F} f(a)\right) \qquad (\text{ (2.8) 式により}\downarrow) \\ &= \bigcup_{a\in X_0}\bigcup_{f\in F}\langle a|\,f(a) \\ &= \bigcup_{f\in F}\bigcup_{a\in X_0}\langle a|\,f(a) \\ &= \bigcup_{f\in F}\mathrm{graph}(f) \\ &= \sup_{f\in F}\mathrm{graph}(f)\end{aligned}$$

となる．F は任意なので，graph は連続．

以上，命題の形でまとめておく；

命題 5. X_0, T は空でない集合とする．X_0 と T に対して定義された写像

$$\begin{aligned}\mathrm{func} &: \mathcal{P}(X_0\times T) \longrightarrow \mathrm{Map}(X_0, T) \\ \mathrm{graph} &: \mathrm{Map}(X_0, T) \longrightarrow \mathcal{P}(X_0\times T)\end{aligned}$$

は連続であり，

$$\mathrm{func}\circ\mathrm{graph} = \mathrm{id}_{\mathrm{Map}(X_0,T)}, \qquad \mathrm{graph}\circ\mathrm{func} = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(X_0\times T)}.$$

Remark. func は，$\mathcal{P}(X_0 \times T)$ から $\mathrm{Map}(X_0, \mathcal{P}(T))$ への連続写像なのだが，$\mathrm{Map}(X_0, \mathcal{P}(T))$ は,（単調性や連続性などを要求していない）「ただの写像」，つまり，集合の圏での射，の集合であることに注意．$\mathrm{Map}(X_0, \mathcal{P}(T))$ の要素は集合の圏での射に過ぎないが，$\mathrm{Map}(X_0, \mathcal{P}(T))$ は，$\mathcal{P}(T)$ の順序から導かれる各点の順序が与えられた完備束，したがって，dcpo である．

2.2.3.3 写像 $\mapsto$ 連続写像

次の条件を満たす X, X_0 を考える；

条件１．$(X, \preceq)$ は dcpo．X_0 は X の空でない部分集合であり，

1. $x, x' \in X_0 \implies \sup\{x, x'\} \in X_0$,
2. X_0 のすべての要素はコンパクト．

この一般的な設定が面倒ならば，$X = \mathcal{P}(S)$, $X_0 = \mathcal{P}_0(S)$ の場合に限定して考えても良い．その場合，記号 $\preceq$ は $\sqsubset$ に，sup は $\bigcup$ に，特に $\sup\{x, x'\}$ は $x \cup x'$ に，置き換えられる．ただし，$\preceq$, sup のままの方が，単なる順序関係と，集合論的操作に頼る順序関係を区別でき，考えやすいと思う．

Remark. x, x' が有限集合ならば，$x \cup x'$ も有限集合であり，また，補題 4 により，$x_0 \in \mathcal{P}(S)$ はコンパクト．

$a \in X$ に集合 $\{x_0 \in X_0 \mid x_0 \preceq a\}$ を対応させる写像を ${}_c\lceil : a \mapsto {}_c\lceil a$ と表すことする．

$a \in X$ から決まる集合 ${}_c\lceil a$ は，

1. 有向である；
$$x_0, x_0' \in X_0,\ x_0 \preceq a,\ x_0' \preceq a \quad \Longrightarrow \quad \sup\{x_0, x_0'\} \in X_0,\ \sup\{x_0, x_0'\} \preceq a.$$
2. コンパクトな要素のみから成る．

空でない集合 T が与えられているとして，$Y = \mathcal{P}(T)$ と置く．
X_0 で定義され Y に値をとる写像 $\varphi \in \mathrm{Map}(X_0, Y)$ に対して，X 全体で定義された写像 $\overleftarrow{\varphi}$ を，

$$\overleftarrow{\varphi}(x) = \bigcup_{x_0 \in {}_c\lceil x} \varphi(x_0) \quad \left(= \bigcup \varphi\langle {}_c\lceil x \rangle\right)$$

と定める；

$$\begin{aligned}\overleftarrow{\varphi}(x) &= \{t \in T \mid \exists x_0 \in {}_c\lceil x : t \in \varphi(x_0)\ \} \\ &= \{t \in T \mid \exists x_0 \in X_0 : x_0 \preceq x \wedge t \in \varphi(x_0)\ \}.\end{aligned}$$

$\overleftarrow{\varphi}$ に対して，以下が成り立つ；

1. $\overleftarrow{\varphi}$ は単調（これは，$x \preceq x'$ ならば ${}_{c}\lceil x \subset {}_{c}\lceil x'$ であることから明らか）．

2. $x_0 \in X_0$ に対しては，

   - $x_0 \in {}_{c}\lceil x_0$ なので $\varphi(x_0) \subset \overleftarrow{\varphi}(x_0)$ であり，
   - x_0 は，$(X, \preceq)$ の部分集合 ${}_{c}\lceil x_0$ の最大なので，φ が単調ならば，$\varphi(x_0) = \overleftarrow{\varphi}(x_0)$.

補題 5. $\varphi \in \mathrm{Map}(X_0, \mathcal{P}(T))$ とする．このとき，任意の有向部分集合 $A \subset X_0$ に対して，

$$\overleftarrow{\varphi}\,(\sup A) = \bigcup \overleftarrow{\varphi}\,\langle A \rangle\,. \tag{2.12}$$

［証明］

$\alpha = \sup A$ と置く（X は dcpo なので $\sup A$ が存在する．ただし，それが X_0 に属するとは限らない）．このとき，$\overleftarrow{\varphi}$ の定義により，

$$\overleftarrow{\varphi}(\alpha) = \bigcup_{x_0 \in {}_{c}\lceil \alpha} \varphi(x_0)$$

であり，$t \in \overleftarrow{\varphi}(\alpha)$ に対して，$t \in \varphi(x_0)$，$x_0 \preceq \alpha$ となる $x_0 \in X_0$ を選んでおくと，

1. $x_0 \preceq \sup A$ なので，x_0 がコンパクトであることの定義により（もしくは，補題 4 により），$x_0 \preceq a$ となる $a \in A$ が存在し，

2. この a に対して，$t \in \varphi(x_0), x_0 \preceq a$ なので，

3. $t \in \overleftarrow{\varphi}(a)$.

したがって，

$$t \in \overleftarrow{\varphi}(\alpha) \implies \exists a \in A : t \in \overleftarrow{\varphi}(a)$$

であり，$\overleftarrow{\varphi}(\alpha) \subset \bigcup \overleftarrow{\varphi}\,\langle A \rangle$.

逆向きの包含関係は，

1. $t \in \bigcup \overleftarrow{\varphi}\,\langle A \rangle$ ならば $t \in \overleftarrow{\varphi}(a)$ となる $a \in A$ が存在し，

2. $\overleftarrow{\varphi}$ は単調で $a \preceq \alpha$ なので，$t \in \overleftarrow{\varphi}(\alpha)$,

よって，$\bigcup \overleftarrow{\varphi}\,\langle A \rangle \subset \overleftarrow{\varphi}(\alpha)$, と導かれる．

□

$\bigcup \overleftarrow{\varphi}\,\langle A \rangle = \sup \overleftarrow{\varphi}\,\langle A \rangle$ なので，任意の有向部分集合 $A \in X$ に対して式 (2.12) が成立することは，$\overleftarrow{\varphi}$ が連続写像であることを意味する．

ここまで，X_0 で定義された写像 φ が与えられたとして $\overleftarrow{\varphi}$ を考えて来たが，ここからは，

> X 全体で定義された写像 $f: X \longrightarrow \mathcal{P}(T)$ が与えられたとして，φ は，その定義域を X_0 に制限した写像 $f|_{X_0}$ であるする．この φ から $\overleftarrow{\varphi}$ を作る

という設定に変える．つまり，i を埋め込み写像

$$i : x_0 \in X_0 \mapsto x_0 \in X$$

として，$\varphi = f \circ i$ についての $\overleftarrow{\varphi}$ を考える．

以下，$\hom(X, Y)$ は dcpo の圏における射の集合（つまり，X から Y への連続写像すべての集合）を表す．

補題 6. X, X_0 は条件 1. を満たす poset，T は空でない集合，$Y = \mathcal{P}(T)$ とする．

1. 写像 $f \in \hom(X, Y) \;\mapsto\; f \circ i \in \mathrm{Map}(X_0, Y)$ は連続.
2. 写像 $\varphi \in \mathrm{Map}(X_0, Y) \;\mapsto\; \overleftarrow{\varphi} \in \hom(X, Y)$ は連続.

［証明］

1. $f \mapsto f \circ i$ の連続性は各点での上限により決まるので明らかだが，証明を書く（と無駄に長い）；

   任意の $x_0 \in X_0$ に対して，

$$\begin{aligned}
\left(\sup_{f \in F}(f \circ i)\right)(x_0) &= \bigcup_{f \in F}\big((f \circ i)(x_0)\big) && （\Leftarrow \mathrm{Map}(X_0, Y) \text{ での上限は各点での上限}） \\
&= \bigcup_{f \in F} f(x_0) && （\Leftarrow i(x_0) = x_0） \\
&= \left(\sup_{f \in F} f\right)(x_0). && （\Leftarrow \mathrm{Map}(X, Y) \text{ での上限は各点での上限}）
\end{aligned}$$

   よって，

$$\sup_{f \in F}(f \circ i) = \left(\sup_{f \in F} f\right) \circ i.$$

2. 補題 5 により，$\overleftarrow{\varphi}$ は連続なので，$\varphi \mapsto \overleftarrow{\varphi}$ は $\hom(X, Y)$ への写像．この写像が連続である

ことを証明する．$F \subset \mathrm{Map}(X_0, Y)$ に対して，すべての $x \in X_0$ において，

$$\begin{aligned}
\left(\sup_{\varphi\in F} \overleftarrow{\varphi}\right)(x) &= \bigcup_{\varphi\in F} \overleftarrow{\varphi}(x) \qquad (\Leftarrow \mathrm{hom}(X,Y) \text{ の順序は各点の順序}) \\
&= \bigcup_{\varphi\in F} \bigcup_{x_0 \preceq x} \varphi(x_0) \\
&= \bigcup_{x_0 \preceq x} \bigcup_{\varphi\in F} \varphi(x_0) \\
&= \bigcup_{x_0 \preceq x} \left(\sup_{\varphi\in F} \varphi\right)(x_0) \qquad (\Leftarrow \mathrm{Map}(X_0,Y) \text{ の順序は各点の順序}) \\
&= \overleftarrow{\sup_{\varphi\in F} \varphi}\,(x).
\end{aligned}$$

$x \in X_0$ は任意なので，

$$\sup_{\varphi\in F} \overleftarrow{\varphi} = \overleftarrow{\sup_{\varphi\in F} \varphi}$$

であり，$\varphi \mapsto \overleftarrow{\varphi}$ は連続.

□

2.2.3.4 代数的な dcpo

次に，f から $\varphi = f \circ i$, φ から $\overleftarrow{\varphi}$，と X からの写像に戻した $\overleftarrow{f \circ i}$ が，元の f に戻るために，$(X, \preceq)$ が満たすべき条件を調べる．

まず，補題 5 により $\overleftarrow{\varphi}$ は連続なので,（X 全体で）等式 $\overleftarrow{\varphi} = f$ が成り立つためには，φ 自身も連続であることが必要．しかし，これは十分条件とはならない．$\overleftarrow{\varphi}$ は，X の部分集合 X_0 での φ の値のみで決まるので，X が X_0 で手の届く場合でないと，等号を期待するのは無理．この「手の届く」という数学とは言えない表現を，以下の数学的定義に変えておく；

次の条件を満たすとき，dcpo $(X, \preceq)$ は**代数的** (algebraic) であるという；

X_0 を X のすべてのコンパクトな要素の集合として定めると，

$$\sup\,({}_c\lceil(x)) = x \qquad (\forall x \in X).$$

例 2. $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \sqsubset)$ は代数的である；

1. 一般に，任意の空でない集合 S に対して $(\mathcal{P}(S), \sqsubset)$ は完備束であり，したがって $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \sqsubset)$ は dcpo .

2. $\mathbb{N}$ の有限部分集合はコンパクトであり（補題 4），逆に，無限個の要素を持つ部分集合はコンパクトではない．［証明］　x が無限集合ならば，$n \in N$ に対して $c_n = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\}$ と置いて $a_n = x \cap c_n$ と定めると，

   (a) $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は（全順序なので）有向．

   (b) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} c_n = \mathbb{N}$ なので，$\bigcup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = x$ であり，したがって，$x \sqsubset \bigcup A$.

   となるが，すべての a_n は有限集合，x は無限集合なので $x \sqsubset a_n$ となる a_n は存在しない．□
   したがって，$X_0 = \mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ は，コンパクトな要素すべてから成る集合．

3. $x \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ に対して，

   (a) $a_n \sqsubset x$, $a_n \in X_0$ であり，

   (b) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} a_n = x$ なので，

   $\bigcup {}_c\lceil x = x$. よって，$(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \sqsubset)$ は代数的．

Remark.　実は，$X = \mathcal{P}(S)$ の場合に限ってしまうと，代数的であるための必要十分条件は，S が可算集合，もしくは，有限集合，となってしまい，数学用語として定義する必要はなくなってしまう．代数的という用語は，$(\mathcal{P}(S), \sqsubset)$ に限定せず一般の dcpo を考えて始めて，意味のある用語となる．

$(X, \preceq)$ が代数的な場合，X_0 はコンパクトな要素すべての集合とする．条件 1. は，もはや要求する必要はない．

Remark.　x, x' がコンパクトなら $\sup\{x, x'\}$ はコンパクトであることは，以下のように示される；$\sup\{x, x'\} \preceq \sup A$ ならば $x \preceq a$, $x' \preceq a'$ となる a, a' が存在し，A は有向なので，$a \preceq a''$, $a' \preceq a''$ となる a'' が存在し，$\sup\{x, x'\} \preceq a''$.　□

命題 6. $(X, \preceq)$ は代数的で，X_0 は，X のコンパクトな要素すべてから成る部分集合であるとする．このとき，$f \in \mathrm{Map}(X, \mathcal{P}(T))$ が連続ならば，$\overleftarrow{f \circ i} = f$.

［証明］

$x \in X$ が与えられたとする．X の部分集合 A を $A = {}_c\lceil x$ と定める．$\varphi = f \circ i$ と置く．

1. A は有向．

2. f は連続であり A は有向なので，任意の $x \in X$ に対して，

$$f\left(\sup\left({}_c\lceil x\right)\right) = \bigcup f\left\langle {}_c\lceil x \right\rangle = \bigcup \varphi\left\langle {}_c\lceil x \right\rangle = \overleftarrow{\varphi}(x).$$

3. X は代数的なので，$\sup\left({}_c\lceil x\right) = x$ であり，

4. $f(x) = \overleftarrow{\varphi}(x)$.

5. $x \in X$ は任意なので，$f = \overleftarrow{\varphi} = \overleftarrow{f \circ i}$.

$\square$

2.2.3.5　Func と Graph

定理 3. $(X, \preceq)$ は代数的な dcpo であり，X_0 は X のすべてのコンパクトな要素から成る部分集合，i は埋め込み写像 $i : x_0 \in X_0 \mapsto x_0 \in X$ とする．T, W は空でない集合であり，$X_0 \times \mathcal{P}(T)$ から W への全単射 h_g が与えられているとする．$Y = \mathcal{P}(T)$, $H = \mathcal{P}(h_g)$ と置き，写像 Graph と Func を，

$$\mathrm{Graph} : \hom(X, Y) \longrightarrow \mathcal{P}(W), \quad f \in \hom(X, Y) \longmapsto H(\mathrm{graph}(f \circ i)) \in \mathcal{P}(W)$$

$$\mathrm{Func} : \mathcal{P}(W) \longrightarrow \mathrm{Map}(X, Y), \quad c \in \mathcal{P}(W) \longmapsto \overleftarrow{\mathrm{func}(H^{-1}(c))} \in \mathrm{Map}(X, Y)$$

と定める．このとき，

1. Func は $\hom(X, Y)$ への写像となり，連続
2. Graph は連続
3. $\mathrm{Func} \circ \mathrm{Graph} = \mathrm{id}_{\hom(X,Y)}$
4. $\mathrm{Graph} \circ \mathrm{Func} \succeq \mathrm{id}_{\mathcal{P}(W)}$

となる．

［証明］

1. 任意の $\varphi \in \mathrm{Map}(X_0, Y)$ に対して，$\overleftarrow{\varphi}$ は補題 5 により連続なので，$\overleftarrow{\mathrm{func}(H^{-1}(c))} \in \hom(X, Y)$. $H^{-1} = \mathcal{P}(h_g^{-1})$ は，命題 4 により連続であり，func は命題 5 により連続，$\varphi \mapsto \overleftarrow{\varphi}$ は補題 6 により連続なので，Func は連続.

2. 任意の $f \in \hom(X, Y)$ に対して，$f \mapsto f \circ i$ は補題 6 により連続であり，graph は命題 5 により連続，$H = \mathcal{P}(h_g)$ は命題 4 により連続なので，Graph は連続.

3. 任意の $f \in \hom(X, Y)$ に対して，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Func}(\mathrm{Graph}(f)) &= \overleftarrow{\mathrm{func}(H^{-1}(\mathrm{Graph}(f)))} \\
&= \overleftarrow{\mathrm{func}(H^{-1}(H(\mathrm{graph}(f \circ i))))} \\
&= \overleftarrow{\mathrm{func}((\mathrm{graph}(f \circ i)))} \qquad (\text{命題 5 により} \downarrow) \\
&= \overleftarrow{f \circ i} \qquad (\text{命題 6 により} \downarrow) \\
&= f
\end{aligned}$$

4. $c \in \mathcal{P}(W)$ に対しては，

$$\begin{aligned}\mathrm{Graph}(\mathrm{Func}(c)) &= H_g\bigl(\mathrm{graph}(\mathrm{Func}(c) \circ i)\bigr) \\ &= H_g\bigl(\mathrm{graph}(\overleftarrow{\mathrm{func}(H_g^{-1}(c))} \circ i)\bigr)\end{aligned}$$

となる．等式 $\overleftarrow{\varphi} \circ i = \varphi$ が成立するならば，$\varphi = \mathrm{func}(H_g^{-1}(c))$ と置いて計算を進めることができるのだが，一般には，この等式は成立しない．したがって，これ以上の等式としての式変形はできないが，$\overleftarrow{\varphi}$ の定義により不等式

$$\overleftarrow{\varphi} \circ i \succeq \varphi$$

は成立するので，

$$\begin{aligned}\mathrm{Graph}(\mathrm{Func}(c)) &= H_g\bigl(\mathrm{graph}(\overleftarrow{\varphi} \circ i)\bigr) \\ &\succeq H_g\bigl(\mathrm{graph}(\varphi)\bigr) \\ &= H_g\bigl(\mathrm{graph}(\mathrm{func}(H_g^{-1}(c)))\bigr) \qquad (\text{ 命題 5 により} \downarrow) \\ &= H_g(H_g^{-1}(c)) \\ &= c\end{aligned}$$

であり，$c \in \mathcal{P}(W)$ は任意なので，不等式

$$\mathrm{Graph}(\mathrm{Func}) \succeq \mathrm{id}_{\mathcal{P}(W)}.$$

□

2.2.3.6　モデル $\mathcal{P}_\omega$

ここまで，構成の流れを見るために一般的枠組みで話を進めてきたが，最も重要な例は，$\mathcal{P}_\omega$ である．

1. $X = \mathcal{P}(\mathbb{N}), T = \mathbb{N}, W = \mathbb{N}$ とする．

2. $X_0 = \mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ であり， $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ から $\mathbb{N}$ への全単射が存在する．例えば，$a \in \mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ の特性関数 I_a から

$$g(a) = \sum_{j=0}^{\infty} I_a(j) \cdot 2^j$$

と定めた関数 $g\colon \mathcal{P}_0(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{N}$ は全単射（右辺は無限和の形で書かれているが，a は有限集合なので，実際には有限和）．

3. $X_0 \times Y = \mathcal{P}_0(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ から $W = \mathbb{N}$ への全単射 h_g を以下のように作る;

   (a) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への全単射が存在するので，そのひとつを $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ とする．

   (b) $\mathbb{N} \times Y$ から $\mathcal{P}_0(\mathbb{N}) \times Y$ への全単射

   $$g \times \mathrm{id}_Y : \langle n, y \rangle \mapsto \langle g(n), y \rangle$$

   の逆写像は $g^{-1} \times \mathrm{id}_Y$ であり全単射.

   (c) $h_g = h \circ (g^{-1} \times \mathrm{id}_Y)$ と定める．

4. $X = Y = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathcal{P}(W) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ であり，

   (a) $\mathrm{Graph} : \hom(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathcal{P}(\mathbb{N})) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ は連続.

   (b) $\mathrm{Func} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \hom(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ は連続.

   (c) $\mathrm{Func} \circ \mathrm{Graph} = \mathrm{id}_{\hom(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathcal{P}(\mathbb{N}))}$, $\mathrm{Graph} \circ \mathrm{Func} \succeq \mathrm{id}_{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$.

   したがって，Func は，$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ から $\hom(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ へのレトラクト．

1. $(X, \preceq)$ は代数的な dcpo であり，X_0 は X のすべてのコンパクトな要素から成る部分集合．i は $X_0 \subset X$ の X への埋め込み写像；$i : x_0 \in X_0 \mapsto x_0 \in X$.
2. T は空でない集合であり，$Y = (\mathcal{P}(T), \sqsubset)$.
3. R は空でない集合であり，g は R から X_0 への全単射（したがって，逆写像 g^{-1} が存在）．
4. W は集合で，h は $R \times T$ から W への全単射（したがって，逆写像 h^{-1} が存在）．

この設定の下で，まず，$R \times T$ から $X_0 \times Y$ への写像 $g \times \mathrm{id}_T : \langle r, t\rangle \mapsto \langle g(r), t\rangle$ の逆写像

$$g^{-1} \times \mathrm{id}_T : \langle x_0, t\rangle \mapsto \langle g^{-1}(x_0), t\rangle$$

と h の合成写像 $h \circ (g^{-1} \times \mathrm{id}_T)$ を h_g と置く；

$$\begin{tikzcd} W & \\ R \times T \arrow[u, "h"] & X_0 \times T \arrow[l, "g^{-1}\times\mathrm{id}_T"] \arrow[ul, "h_g"'] \end{tikzcd} \qquad h_g = h \circ (g^{-1} \times \mathrm{id}_Y)$$

h_g, h_g^{-1} から定められる写像

$$\begin{aligned} H_g &: \mathcal{P}(X_0 \times T) \longrightarrow \mathcal{P}(W), \quad c' \in \mathcal{P}(X_0 \times T) \mapsto h_g(c) \\ H_g^{-1} &: \mathcal{P}(W) \longrightarrow \mathcal{P}(X_0 \times T), \quad c \in \mathcal{P}(X_0 \times T) \mapsto h_g^{-1} \end{aligned}$$

は，命題 4 により連続であり，互いの逆写像になる．

$\mathcal{P}(W)$ の部分集合 c と $f : X \longrightarrow Y$ の対応を考える．

1. $f \in \mathrm{Map}(X, \mathcal{P}(T))$ が与えられたとする．
   (a) $f \circ i$ は X_0 から $\mathcal{P}(T)$ への写像,
   (b) $\mathrm{graph}(f \circ i) \subset X_0 \times T$,
   (c) $H\big(\mathrm{graph}(f \circ i)\big) \subset W$

   なので，

   $$\mathrm{Graph}(f) = H\big(\mathrm{graph}(f \circ i)\big)$$

   と置いて Graph を定めると，

   $$\mathrm{Graph} : f \in \mathrm{Map}(X, \mathcal{P}(T)) \mapsto \mathrm{Graph}(f) \in \mathcal{P}(W).$$

(a) 写像 $f \mapsto f \circ i$ は連続,　（$\Leftarrow$ 補題 6）
(b) graph は連続,　（$\Leftarrow$ 命題 5）
(c) H は連続　（$\Leftarrow$ 命題 4）

なので，Graph は連続.

2. $c \subset W$ が与えられたとする.

(a) $H_g^{-1}(c) \subset X_0 \times T$ なので，
(b) $\mathrm{func}(H_g^{-1}(c)) \in \mathrm{Map}(X_0, \mathcal{P}(T))$.
(c) したがって，

$$\overleftarrow{\mathrm{func}(H_g^{-1}(c))} \in \hom(X, \mathcal{P}(T)).$$

なので，

$$\mathrm{Func}(c) = \overleftarrow{\mathrm{func}(H_g^{-1}(c))} \in \hom(X, \mathcal{P}(T))$$

として $\mathrm{Func}(c)$ を定めると，

$$\mathrm{Func}: \ c \in \mathcal{P}(W) \mapsto \mathrm{Func}(c) \in \hom(X, \mathcal{P}(T)).$$

(a) H_g^{-1} は連続.　（$\Leftarrow$ 命題 4）
(b) func は連続.　（$\Leftarrow$ 命題 5）
(c) 写像 $\varphi \mapsto \overleftarrow{\varphi}$ は連続　（$\Leftarrow$ 補題 6）

なので，Func は連続.

3. $\mathrm{Func}(\mathrm{Graph}(f)) = f$ となる； $f \in \hom(X, Y)$ ならば，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Func}(\mathrm{Graph}(f)) &= \overleftarrow{\mathrm{func}(H_g^{-1}(\mathrm{Graph}(f)))} \\
&= \overleftarrow{\mathrm{func}(H_g^{-1}(H(\mathrm{graph}(f \circ i))))} \\
&= \overleftarrow{\mathrm{func}((\mathrm{graph}(f \circ i)))} \\
&= \overleftarrow{f \circ i} \\
&= f
\end{aligned}$$

4. $c \in \mathcal{P}(W)$ に対しては，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Graph}(\mathrm{Func}(c)) &= H_g\bigl(\mathrm{graph}(\mathrm{Func}(c) \circ i)\bigr) \\
&= H_g\bigl(\mathrm{graph}(\overleftarrow{\mathrm{func}(H_g^{-1}(c))} \circ i)\bigr)
\end{aligned}$$

となる．等式 $\overleftarrow{\varphi} \circ i = \varphi$ が成立するならば，$\varphi = \mathrm{func}(H_g^{-1}(c))$ と置いて計算を進めることができるのだが，一般には，この等式は成立しない．したがって，これ以上の等式としての式変形はできない．ただし，不等式

$$\overleftarrow{\varphi} \circ i \succeq \varphi$$

は成立するので，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Graph}(\mathrm{Func}(c)) &= H_g\bigl(\mathrm{graph}(\overleftarrow{\varphi} \circ i)\bigr) \\
&\succeq H_g\bigl(\mathrm{graph}(\varphi)\bigr) \\
&= H_g\bigl(\mathrm{graph}(\mathrm{func}(H_g^{-1}(c)))\bigr) \\
&= H_g(H_g^{-1}(c)) \\
&= c
\end{aligned}$$

であり，$c \in \mathcal{P}(W)$ は任意なので，不等式

$$\mathrm{Graph}(\mathrm{Func}) \succeq \mathrm{id}_{\mathcal{P}W}$$

が得られる．

2.2.3.7 定理

繰り返しになるが，設定と記号の定義も含めて，以上の結果を定理の形でまとめておく．

定理 4. 以下の条件を満たす dcpo $(X, \preceq)$ と空でない集合 T, R, W が与えられているとする；

1. $(X, \preceq)$ は代数的な dcpo であり，X_0 は X のすべてのコンパクトな要素から成る部分集合．
2. R から X_0 への全単射が存在する．そのひとつを g とする．
3. $R \times T$ から W への全単射が存在する．そのひとつを h とする．

$g^{-1} \times \mathrm{id}_T : \langle x_0, t\rangle \mapsto \langle g^{-1}(x_0), t\rangle$ と h の合成写像 $h \circ (g^{-1} \times \mathrm{id}_T)$ を，h_g と置き，写像 $H : \mathcal{P}(X_0 \times T) \longrightarrow \mathcal{P}(W)$ を

$$H_g : \mathcal{P}(X_0 \times T) \longrightarrow \mathcal{P}(W), \quad c' \in \mathcal{P}(X_0 \times T) \mapsto h_g(c)$$

と定め，$\mathrm{Graph} : \mathrm{hom}(X, \mathcal{P}(T)) \longrightarrow \mathcal{P}(W)$, $\mathrm{Func} : \mathcal{P}(W) \longrightarrow \mathrm{Map}(X, \mathcal{P}(T))$ を

$$\begin{aligned}
\mathrm{Graph}(f) &= H(\mathrm{graph}(f \circ i)), \quad f \in \mathrm{hom}(X, \mathcal{P}(T)) \\
\mathrm{Func}(c) &= \overleftarrow{\mathrm{func}(H^{-1}(c))}, \quad c \in \mathcal{P}(W)
\end{aligned}$$

と定める．このとき，

1. Func は $\hom(X, \mathcal{P}(T))$ への写像となり，連続.

2. Graph は連続.

3. $\mathrm{Func} \circ \mathrm{Graph} = \mathrm{id}_{\hom(X,\mathcal{P}(T))}$.

4. $\mathrm{Graph} \circ \mathrm{Func} \succeq \mathrm{id}_{\mathcal{P}(W)}$.

第3章　Appendix A. Examples

3.1　Retraction

3.1.1　O1 圏の条件

圏の対象は，集合であると限定されているわけではなく，射も写像であるとは限らない．さらに，対象が集合で射が写像であるとしても，射の順序が各点の順序

$$f \preceq g \iff f(a) \preceq g(a) \quad (\forall a \in A)$$

として定められているとも限らない．それでも，やはり「普通の圏」の場合に **O1** 圏の条件が何を意味するかを見ておくべきだろう．以下の条件を満たす **O1** 圏 $\mathcal{C}$ を考える；

1. $\mathcal{C}$ の対象は poset であり，射は写像.
2. 要素をひとつだけもつ対象，そのひとつを $\{\alpha\}$ とする，が存在する.
3. 任意の対象 A と $a \in A$ に対して，$\{\alpha\}$ からの写像 $h_a : \alpha \mapsto a$ は $\hom(\{\alpha\}, A)$ に属し，$a \preceq a' \iff h_a \preceq h_{a'}$.

このとき，このとき，$A = \{\alpha\}$ と考えて，

1. $f \in \hom(B, C)$ とする． $b \preceq b'$ となる $b, b' \in B$ が与えられているとすると，
   (a) 仮定 3. により，$h_b \preceq h_{b'}$.
   (b) **O1** 圏の条件 1. により，$f \circ h_b \preceq f \circ h_{b'}$.
   (c) $f \circ h_b = h_{f(b)}$，$f \circ h_{b'} = h_{f(b')}$.
   (d) したがって，$h_{f(b)} \preceq h_{f(b')}$ であり，仮定 3. により，
   (e) $f(b) \preceq f(b')$.

   よって，f は単調.
2. $f \preceq f'$ となる $f, f' \in \hom(B, C)$ が与えられているとする．任意の $b \in B$ に対して，
   (a) **O1** 圏の条件 2. により，$f \circ h_b \preceq f' \circ h_b$.
   (b) $f \circ h_b = h_{f(b)}$，$f' \circ h_b = h_{f(b')}$.

(c) したがって，$h_{f(b)} \preceq h_{f(b')}$ であり，仮定 3. により，

(d) $f(b) \preceq f(b')$.

$b \in B$ は任意なので，

$$f \preceq f' \implies f(b) \preceq f'(b) \quad (\forall b \in B).$$

Remark. しかし，

$$f(b) \preceq f'(b) \quad (\forall b \in B) \implies f \preceq f'$$

であるとは限らない．実際，$C = B$ として，

1. $B = \{0, 1\}$ と $A = \{\alpha\}$ のみが対象，
2. $K_0 : B \longrightarrow B$ を値 0 の定値写像として，
$$\hom(B, A) = \emptyset, \hom(B, B) = \{K_0, \mathrm{id}_B\},$$
3. $\hom(B, B)$ において K_0 と id_B は比較不能

と定めて **O1** 圏を作ることができる．

$$K_0(0) \preceq \mathrm{id}_B(0),\ K_0(1) \preceq \mathrm{id}_B(1)$$

となるのだが，$K_0 \preceq \mathrm{id}_B$ とはならない（ように定義されている）ので，$\hom(B, B)$ の順序は各点の順序ではない．

3.1.2 O2 圏の条件

さらに，圏 $\mathcal{C}$ は **O2** 圏であるとする．$\{\alpha\}$ を A と表すことは止めて，ここからは，A は $\mathcal{C}$ の一般の対象とする．

1. $f_0, f_1, f_2, \ldots \in \hom(A, B)$ は単調列であり，$a \in A$ が与えられているとして，
$$\hat{f}_j = f_j \circ h_a \in \hom(\{\alpha\}, B),\ j = 0, 1, 2, \ldots$$
と定める．
   - 任意の $m = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，$g_j \in \hom(\{\alpha\}, B)$ を
$$g_j = \begin{cases} \hat{f}_j & j = 0, 1, 2, \ldots, m \\ \hat{f}_m & j = m, m+1, \ldots \end{cases}$$

と定めると，$g_j \preceq \hat{f}_j$, $j = 0, 1, 2, \dots$ であり，**O2** 圏の条件 2.(b) により

$$\lim_{n\to\infty} g_n \preceq \lim_{n\to\infty} \hat{f}_n.$$

条件 2.(c) により $\lim_{n\to\infty} g_j = \hat{f}_m$ なので，

$$\hat{f}_m \preceq \lim_{n\to\infty} \hat{f}_n.$$

条件 2.(a) (ii) により，

$$\lim_{n\to\infty} \hat{f}_n = \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) \circ h_a$$

なので，

$$\hat{f}_m \preceq \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) \circ h_a$$

であり，したがって，

$$f_m(a) \preceq \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)(a).$$

m は任意なので，$(\lim_{n\to\infty} f_n)(a)$ は $f_0(a), f_1(a), f_2(a), \dots$ の上界．

- $b \in B$ は $f_0(a), f_1(a), f_2(a), \dots$ の上界であるとする．このとき，$g_j(\alpha) = b$, $j = 0, 1, 2, \dots$ として $g_j \in \hom(\{\alpha\}, B)$ を定めると，同じく 2.(b), 2.(c), 2.(a) (ii) により，$(\lim_{n\to\infty} f_n)(a) \preceq b$.

以上により，各 $a \in A$ に対して，$(\lim_{n\to\infty} f_n)(a)$ は，$f_0(a), f_1(a), f_2(a), \dots$ の B における上限であることがわかる．

2. $g \in \hom(A, B)$ と A での単調列 $a_0 \preceq a_1 \preceq a_2 \preceq \dots$ が与えられているとする．$f_j = h_{a_j}$ として $f_j \in \hom(\{\alpha\}, A)$ を定めると，$f_0 \preceq f_1 \preceq f_2 \preceq \cdots$ であり，

   (a) 1.(a) により $g \circ f_j$ は単調列なので，$\lim_{n\to\infty}(g \circ f_j)$ が定まる．

   (b) 2.(a) により

   $$\lim_{n\to\infty} (g \circ f_j) = g \circ \lim_{n\to\infty} f_j.$$

   (c) したがって，

   $$\lim_{n\to\infty} g(a_j) = g\left(\lim_{n\to\infty} a_j\right). \tag{3.1}$$

Remark. **O2** 圏についても逆向きの主張は保証されない．実際，$B = \{0, 1\}$ のような有限集合に対しては，極限操作についての条件は，ほとんど効力がない．B から B への写像 $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 1$ は等式 (3.1) を満たすが，これを $\hom(B, B)$ に登録しないことは可能．

3.1.3　単射型と全射型

一般に，圏 $\mathcal{C}$ の任意の対象 A, B に対して $\hom(A,B)$ が高々ひとつの射しか含まないならば，圏 $\mathcal{C}$ のすべての射は，単射型であり全射型でもある．

- 圏 $\mathcal{C}$ の対象は，$A = \{0\}$ と $B = \{0,1\}$ のみで，$f \in \hom(B,A)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$ とする．また，射の集合は，

$$\hom(A,A) = \{\mathrm{id}_A\},\quad \hom(B,B) = \{\mathrm{id}_B\},\quad \hom(A,B) = \emptyset,\quad \hom(B,A) = \{f\}$$

  であるとする．このとき，f は単射ではないが，単射型．

- 圏 $\mathcal{C}$ の対象は，$A = \{0\}$ と $B = \{0,1\}$ のみで，$g \in \hom(A,B)$, $g(0) = 0$ とする．また，射の集合は，

$$\hom(A,A) = \{\mathrm{id}_A\},\quad \hom(B,B) = \{\mathrm{id}_B\},\quad \hom(A,B) = \{g\},\quad \hom(B,A) = \emptyset$$

  であるとする．g は全射ではないが，全射型．

3.2　不等式についての簡約性

まず，順序関係と独立な性質を調べる．$\hom(A,B)$ に順序関係を要求しない一般的意味での圏を，圏 $\mathcal{C}^-$ と表すことにする（ただし，$\hom(A,B)$ が集合であることは要求する）．

3.2.1　スケルトン

3.2.1.1　単純列

射影列と帰納列から成るレトラクト列

$$D_0 \xleftarrow{pr_0} D_1 \xleftarrow{pr_1} \cdots \xleftarrow{pr_{n-1}} D_n \xleftarrow{pr_n} D_{n+1} \xleftarrow{pr_{n+1}} \cdots$$

$$D_0 \xrightarrow[in_1]{} D_1 \xrightarrow[in_2]{} \cdots \xrightarrow[in_n]{} D_n \xrightarrow[in_{n+1}]{} D_{n+1} \xrightarrow[in_{n+2}]{} \cdots$$

から順序関係に絡む性質 $in_{n+1} \circ pr_n \preceq \mathrm{id}_{n+1}$ を忘れて，$pr_n \circ \mathrm{id}_{n+1} = \mathrm{id}_n$ のみを要求したものを考える．

この射影列の射影極限を調べたい場合，D_n と同型になる D_{n+1} は冗長なので，つまり，$in_{n+1} \circ pr_n = \mathrm{id}_n$ となる D_{n+1} は冗長なので，そのような項は既に取り除かれているものとして，各 $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して D_n と D_{n+1} が同型ではないことを要求する．したがって，

$$pr_n \circ in_{n+1} = \mathrm{id}_n,\quad in_{n+1} \circ pr_n \neq \mathrm{id}_{n+1}$$

という条件を要求する．この条件を満たす射影列と帰納列の対を，**単純列**と言うことにする．

3.2.1.2　スケルトン

順序関係に関わっていないことを強調して，記号 pr_n, in_{n+1} を使うことは控えて，それぞれ p_n, i_{n+1} と書くことにする．id_{D_m} は id_m と略記する．したがって，pr^n_m, in^m_n の代わりに，$m \leq n$ に対して，

$$p^n_m = p_m \circ p_{m+1} \circ \cdots \circ p_{n-1}, \quad i^m_n = i_n \circ i_{n-1} \circ \cdots \circ i_{m+1}$$

と表すことになる．p^m_m, i^m_m は恒等写像 id_m とする．
p^n_m を（添え字を無視して一般に）p-射，i^m_n を i-射と言うことにする．

$m \leq n$ に対して，$p^n_m \circ i^m_n = \mathrm{id}_m$ になるので，p-射は全射型であり，i-射は単射型である；

$$f \circ p^n_m = g \circ p^n_m \implies f = g. \quad (\Leftarrow \text{右側から } i^m_n \text{ を合成すれば良い})$$
$$i^m_n \circ f = i^m_n \circ g \implies f = g. \quad (\Leftarrow \text{左側から } p^n_m \text{ を合成すれば良い})$$

実際には，

- 等式を変形して，両辺の右側に共通の p-射があれば，それを取り除く
- 等式を変形して，両辺の左側に共通の i-射があれば，それを取り除く

という使い方をすることになる．

圏 $\mathcal{C}^-$ において，p-射と i-射の合成射として作れる射を考える．この形の射を $\langle p, i\rangle$-射と言うことにする．単純列を作る D_m, D_n の間の射がすべて $\langle p, i\rangle$-射であるとき，この単純列を **スケルトン**と言うことにする．

f を p-射と i-射の合成として表したとき，i-射の左側にひとつでも p-射があるならば，p-射を左側，i-射を右側として隣接する 2 つの射が存在し，それらは，$p^{j+1}_j \circ i^j_{j+1}$ $(= p_j \circ i_{j+1})$ の形をとる．しかし，これは id_j に等しいので取り除いてしまっても，残りの射で f を表すことができる．したがって，この操作を繰り返すことにより，f を，（添え字を無視して書くと）$f = i \circ \cdots i \circ p \circ \cdots p$ の形で表すことができる．
スケルトンでは，射の合成が可能となる条件から，

- $0 \leq \ell \leq m$ に対して，$f \in \hom(D_m, D_\ell)$ は，

  $$f_j = i^j_\ell \circ p^m_j, \quad j = 0, 1, \ldots, \ell$$

  のいずれかと等しく（特に $j = \ell$ のときは，$f_\ell = p^m_\ell$），
- $m \leq n$ に対して，$f \in \hom(D_m, D_n)$ は，

  $$f_j = i^j_n \circ p^m_j, \quad j = 0, 1, \ldots, m$$

  のいずれかと等しい (特に $j = n$ のときは，$f_n = i^m_n$)．

補題 7. $0 \le j \le k$ に対して，

$$i^j_k \circ p^k_j = \mathrm{id}_k \implies j = k.$$

［証明］ j を固定し，$i^j_{j+n} \circ p^{j+n}_j \neq \mathrm{id}_{j+n}$，$n = 1, 2, \ldots$ であることを帰納法で証明する．
まず，単純列の定義により，$n = 1$ で成立．$i^j_{j+n} \circ p^{j+n}_j \neq \mathrm{id}_{j+n}$ を帰納法の仮定として，$n + 1$ でも等号が成立しないことを示す；
$i^j_{j+n+1} \circ p^{j+n+1}_j = \mathrm{id}_{j+n+1}$ ならば，両辺を

$$\begin{aligned} i^j_{j+n+1} \circ p^{j+n+1}_j &= i_{j+n+1} \circ (i^j_{j+n} \circ p^{j+n}_j) \circ p_{j+n} \\ \mathrm{id}_{j+n+1} &= i_{j+n+1} \circ \mathrm{id}_{j+n} \circ p_{j+n} \end{aligned}$$

と書き直してから両辺で共通の i-射 i_{j+n+1} と p-射 p_{j+n} を取り除くことにより，等式 $i^j_{j+n} \circ p^{j+n}_j = \mathrm{id}_{j+n}$ を得るが，これは帰納法の仮定に反する．よって，$i^j_{j+n+1} \circ p^{j+n+1}_j \neq \mathrm{id}_{j+n+1}$． □

補題 8. スケルトンでは，$0 \le j \le k \le m, m'$ に対して，

$$i^j_{m'} \circ p^m_j = i^k_{m'} \circ p^m_k \implies j = k.$$

［証明］ $i^j_{m'} \circ p^m_j = i^k_{m'} \circ p^m_k$ の両辺を（k を中継点に選んで）

$$\begin{aligned} i^j_{m'} \circ p^m_j &= i^k_{m'} \circ (i^j_k \circ p^k_j) \circ p^m_k \\ i^k_{m'} \circ p^m_k &= i^k_{m'} \circ \mathrm{id}_k \circ p^m_k \end{aligned}$$

と書き直すことにより，$\hom(D_k, D_k)$ における等式 $i^j_k \circ p^k_j = \mathrm{id}_k$ を得る．補題7 により，$j = k$． □

$f \in \hom(D_m, D_{m'})$ を $i^s_{m'} \circ p^m_s$ と表したときの s の値を，f の**指数**と言うことにする．$f \in \hom(D_m, D_{m'})$ の指数は，0 から $\min\{m, m'\}$ の値を取り得る．

スケルトンでは，$0 \le m, m'$ に対して $\hom(D_m, D_{m'})$ の要素は，指数 s が 0 から $\min\{m, m'\}$ まで，

$$i^s_{m'} \circ p^m_s, \quad s = 0, 1, \ldots, \min\{m, m'\}$$

の形であり，指数 s により一意に決まる；

$$\hom(D_m, D_{m'}) = \{ i^s_{m'} \circ p^m_s \mid s = 0, 1, 2, \ldots, \min\{m, m'\} \}.$$

特に，$m = m'$ の場合，

$$\hom(D_m, D_m) = \{ i^s_m \circ p^m_s \mid s = 0, 1, 2, \ldots, m \}.$$

補題 9. $\langle p,i\rangle$-射 f,g の合成 $f\circ g$ の指数は，f の指数 ρ と g の指数 σ の最小値 $s=\min\{\rho,\sigma\}$ となる．

［証明］　$\mathrm{dom}(g)=D_m$, $\mathrm{cod}(g)=\mathrm{dom}(f)=D_{m'}$, $\mathrm{cod}(f)=D_{m''}$ とする．

$\rho\le\sigma$ のときは $p_\rho^{m'}$ を $p_\rho^\sigma\circ p_\sigma^{m'}$ と書き換え，$\sigma\le\rho$ のときは $i_{m'}^\sigma$ を $i_{m'}^\rho\circ i_\rho^\sigma$ に書き換えて計算する；

$$
\begin{aligned}
f\circ g &= (i^\rho_{m''}\circ p^{m'}_\rho)\circ(i^\sigma_{m'}\circ p^m_\sigma)\\
&=\begin{cases}
\begin{aligned}
i^\rho_{m''}\circ(p^\sigma_\rho\circ p^{m'}_\sigma)\circ i^\sigma_{m'}\circ p^m_\sigma &= i^\rho_{m''}\circ p^\sigma_\rho\circ(p^{m'}_\sigma\circ i^\sigma_{m'})\circ p^m_\sigma\\
&= i^\rho_{m''}\circ p^\sigma_\rho\circ p^m_\sigma\\
&= i^\rho_{m''}\circ p^m_\rho,
\end{aligned} & \text{if}\quad \rho\le\sigma\\[2ex]
\begin{aligned}
i^\rho_{m''}\circ p^{m'}_\rho\circ(i^\rho_{m'}\circ i^\sigma_\rho)\circ p^m_\sigma &= i^\rho_{m''}\circ(p^{m'}_\rho\circ i^\rho_{m'})\circ i^\sigma_\rho\circ p^m_\sigma\\
&= i^\rho_{m''}\circ i^\sigma_\rho\circ p^m_\sigma\\
&= i^\sigma_{m''}\circ p^m_\sigma,
\end{aligned} & \text{if}\quad \sigma\le\rho.
\end{cases}
\end{aligned}
$$

であり，両方共に指数は $\min\{\rho,\sigma\}$ となっている．　□

□

3.2.1.3　射影列への射

スケルトン

$$
D_0 \xleftarrow{p_0} D_1 \xleftarrow{p_1} \cdots\cdots \xleftarrow{p_{m-1}} D_m \xleftarrow{p_m} \cdots\cdots
$$

$$
D_0 \xrightarrow[i_1]{} D_1 \xrightarrow[i_2]{} \cdots\cdots \xrightarrow[i_m]{} D_m \xrightarrow[i_{m+1}]{} \cdots\cdots
$$

に対して，以下の記号を用意しておく；

$$
\begin{aligned}
&E_m=\mathrm{hom}(D_m,D_m)=\{i^s_m\circ p^m_s \mid s=0,1,\dots,m\},\quad m=0,1,2,\dots,\\
&E=\bigcup_{j=0,1,\dots} E_j.
\end{aligned}
$$

$$
\downarrow\colon E\longrightarrow E,\quad \downarrow(i^s_{m+1}\circ p^{m+1}_s)=\begin{cases} i^s_m\circ p^m_s, & 0\le s\le m\\ \mathrm{id}_m, & s=m+1\end{cases} \tag{3.2}
$$

$$
\uparrow\colon E\longrightarrow E,\quad \uparrow(i^s_m\circ p^m_s)=i^s_{m+1}\circ p^{m+1}_s,\quad 0\le s\le m. \tag{3.3}
$$

したがって，

1. $\downarrow\circ\uparrow = \mathrm{id}_E$.

2. 各 m に対して，$s \leq m$ に対しては $(\uparrow\circ\downarrow)\,(i^s_{m+1}\circ p^{m+1}_s) = i^s_{m+1}\circ p^{m+1}_s$ となるが，

3. $(\uparrow\circ\downarrow)\,(\mathrm{id}_{m+1}) = i_{m+1}\circ p_m$ であり，$\downarrow$ は $i_{m+1}\circ p_m$ と id_{m+1} の両者を id_m に写す．

補題 10. スケルトンの射影列

$$D_0 \xleftarrow{p_0} D_1 \xleftarrow{p_1} \cdots\cdots \xleftarrow{p_{m-1}} D_m \xleftarrow{p_m} \cdots\cdots$$

と，対象 X からこの射影列への射の族 $\{f_j\}, \{g_j\}$，及び，$m \geq 1$ が与えられていて，条件

$$\text{各 } 0 \leq j \leq m \text{ に対して，}\quad g_j = h_j \circ f_j \text{ となる } h_j \in E_j \text{ が一意に存在する}$$

を満たしているとする．このとき，

1. $h_j = \downarrow(h_{j+1}),\ 0 \leq j \leq m-1$ であり，

2. $f_\ell = g_\ell$ となる最大の $\ell \leq m$ が存在して，

$$g_j = \begin{cases} p^\ell_j \circ g_\ell, & 0 \leq j \leq \ell \\ i^\ell_j \circ g_\ell, & \ell \leq j \leq m \end{cases}$$

となる．

［証明］　まず，$h_j = \downarrow(h_{j+1})$ となることを，h_{j+1} の指数が $j+1$ の場合（$h_{j+1} = \mathrm{id}_{j+1}$ の場合）とそれ以外に場合分けして確かめる；

- $g_{j+1} = \mathrm{id}_{j+1}\circ f_{j+1}$ のときは，

  $$g_j = p_j \circ g_{j+1} = p_j \circ f_{j+1} = f_j$$

  であり，一意性により $h_j = \mathrm{id}_j = \downarrow(h_{j+1})$.

- $g_{j+1} = (i^s_{j+1}\circ p^{j+1}_s)\circ f_{j+1}$，$s \leq j$ のときは，

  $$\begin{aligned} g_j &= p_j \circ g_{j+1} \\ &= p_j \circ (i^s_{j+1}\circ p^{j+1}_s)\circ f_{j+1} \quad (\ p_j \circ i^s_{j+1} = i^s_j \text{ なので } \downarrow) \\ &= i^s_j \circ p^{j+1}_s \circ f_{j+1} \\ &= i^s_j \circ (p^j_s \circ p^{j+1}_j)\circ f_{j+1} \quad (\ p_j \circ f_{j+1} = f_j \text{ なので } \downarrow) \\ &= (i^s_j \circ p^j_s)\circ f_j \end{aligned}$$

  であり，一意性により $h_j = i^s_j \circ p^j_s = \downarrow(h_{j+1})$.

次に，$f_\ell = g_\ell$ となる最大の $\ell \leq m$ が存在することは,（$E_0 = \{\mathrm{id}_0\}$ なので）$f_0 = g_0$ となることから明らか.

$0 \leq j \leq \ell$ に対しては，射影列への射の定義により $g_j = p_j^\ell \circ g_\ell$ なので，$j = \ell, \ell+1, \ldots, m$ の場合について $g_j = i_j^\ell \circ g_\ell$ となることを確かめれば良い.

$j = \ell$ の場合は，$g_\ell = \mathrm{id}_\ell \circ g_\ell = i_\ell^\ell \circ g_\ell$.

$\ell + 1 \leq m$ である場合，$\downarrow(h_{\ell+1}) = \mathrm{id}_\ell$ となる $h_{\ell+1}$ は $\mathrm{id}_{\ell+1}$, もしくは，$i_{\ell+1} \circ p_\ell$ だが，ℓ が最大であることにより，$h_{\ell+1} = i_{\ell+1} \circ p_\ell$ に限定される．したがって，

$$
\begin{aligned}
g_{\ell+1} &= (i_{\ell+1} \circ p_\ell) \circ g_{\ell+1} \\
&= i_{\ell+1} \circ (p_\ell \circ g_{\ell+1}) = i_{\ell+1}^\ell \circ g_\ell.
\end{aligned}
$$

$\ell + 2 \leq m$ である場合，$h_{\ell+1} \neq \mathrm{id}_{\ell+1}$ であることがすでに示されているので，$\downarrow(h_{\ell+2}) = h_{\ell+1}$ となる $h_{\ell+2}$ は $\uparrow(h_{\ell+1})$ に限られる．よって，$h_{\ell+2} = i_{\ell+2}^\ell \circ p_\ell^{\ell+2}$ であり

$$
\begin{aligned}
g_{\ell+2} &= \left(i_{\ell+2}^\ell \circ p_\ell^{\ell+2}\right) \circ g_{\ell+2} \\
&= i_{\ell+2}^\ell \circ g_\ell.
\end{aligned}
$$

以下，再帰的に，$j = \ell, \ell+1, \ldots, m$ に対して，

$$
g_j = i_j^\ell \circ g_\ell
$$

であることが導かれる． □

3.2.1.4 D_m からの射の族

補題 11. D_m からスケルトンへの射の族 $\{g_j\}$ が与えられているとする．g_j は

$$
g_j = \begin{cases} p_j^s \circ g_s, & 0 \leq j \leq s \\ i_j^s \circ g_s, & s \leq j \end{cases}
$$

と表され，s は g_m の指数として求められる．

［証明］

射の族 $\{f_j\}$ を，

$$
f_j = \begin{cases} p_j^m, & 0 \leq j \leq m \\ i_j^m, & m \leq j \end{cases}
$$

と定めると，$\{f_j\}$ は射影列への射の族となる．$0 \leq j \leq m$ に対して，スケルトンの定義により，D_m から D_j への射 g_j は，その指数を ℓ として $i_j^\ell \circ p_\ell^m$ の形に限られ，

$$
g_j = i_j^\ell \circ p_\ell^m = (i_j^\ell \circ p_\ell^j) \circ p_j^m = (i_j^\ell \circ p_\ell^j) \circ f_j
$$

なので，$h_j = i_j^\ell \circ p_\ell^j$ と置くことにより g_j は，$g_j = h_j \circ f_j\,(= h_j \circ p_j^m)$ と表される．また，

$$(i_j^\ell \circ p_\ell^j) \circ p_j^m = h_j \circ p_j^m \implies i_j^\ell \circ p_\ell^j = h_j$$

なので，h_j は一意に決まる． したがって，補題 10 を用いることができ，

$$g_j = \begin{cases} p_j^s \circ g_s, & 0 \le j \le s \\ i_j^s \circ g_s, & s \le j \le m \end{cases}, \qquad g_s = f_s$$

となる $0 \le s \le m$ が存在することがわかる．特に，$j = m$ では $g_m = i_m^s \circ f_s = i_m^s \circ p_s^m$ であり右辺の指数は s なので，s は g_m の指数として求められる．したがって，$j = s$ では $g_s = f_s = p_s^m$ となる．

$m \le n$ に対しては，$g_n \in \hom(D_m, D_n)$ は $g_n = i_n^\ell \circ p_\ell^m$ の形に限られ，

$$g_m = i_m^\ell \circ p_\ell^m$$

となるので，$\ell = s$. したがって，

$$g_n = i_n^s \circ p_s^m = i_n^s \circ g_s$$

であり，$n \ge m$ についても $g_n = i_n^s \circ g_s$ となる． □

3.2.1.5 射影極限

補題 12. D がスケルトンの射影列に対しての射影極限ならば，射の族 $\iota^j : D_j \longrightarrow D$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ で等式

1. $0 \le \ell \le m$ に対して，$\pi_\ell \circ \iota^m = p_\ell^m$,
2. $m \le n$ に対して，$\pi_n \circ \iota^m = i_n^m$

を満たし，帰納列からの射の族となるもの，つまり，

$$\iota_m = \iota^{m+1} \circ i_{m+1}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

となるものが存在する．

［証明］

ι^j の構成の部分は，命題 2 での証明が（順序関係に絡んだ性質はなにも使っていないため）そのまま成り立つが，帰納列からの射の族となることは，D が射影極限であることを用いて直接に「単純作業」で示す必要がある．

1. $0 \le \ell \le m$ に対して，

$$\begin{aligned} \pi_\ell \circ (\iota^{m+1} \circ i_{m+1}) &= (\pi_\ell \circ \iota^{m+1}) \circ i_{m+1} = p_\ell^{m+1} \circ i_{m+1} \\ &= p_\ell^m = \pi_\ell \circ \iota^m. \end{aligned}$$

2. $m < n$ に対して，

$$\begin{aligned}\pi_n \circ (\iota^{m+1} \circ i_{m+1}) &= (\pi_n \circ \iota^{m+1}) \circ i_{m+1} = i_n^{m+1} \circ i_{m+1} \\ &= i_n^m = \pi_n \circ \iota^m.\end{aligned}$$

したがって，すべての $j = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，$\pi_j \circ (\iota^{m+1} \circ i_{m+1}) = \pi_j \circ \iota^m$ となるが，射影極限の射の族 $\{\pi_j\}$ は（等号についての）簡約性をもつので，

$$\iota^{m+1} \circ i_{m+1} = \iota^m.$$

$\square$

3.2.1.6 E_m と $\widehat{E}_m$ の対応

対象 D からスケルトンの射影列への射の族 $\{\pi_j\}$ と，帰納列から D への射の族 $\{\iota^j\}$ であって関係

$$\pi_j \circ \iota^m = \begin{cases} p_j^m, & 0 \le j \le m \\ i_j^m, & m \le j \end{cases}$$

を満たすものが与えられているとする．

各 $m = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，

1. $E_m = \hom(D_m, D_m)$，
2. $f \in E_m$ に対して，$\widehat{f} = \iota^m \circ f \circ \pi_m \in \hom(D, D)$，
3. $\widehat{E}_m = \{\widehat{f} \mid f \in E_m\} \subset \hom(D, D)$

と置く．

Remark. $\pi_m \circ \iota^m = \mathrm{id}_{D_m}$ となるので，π_m は全射型であり，ι^m は単射型．したがって，$\widehat{f} = \widehat{g} \implies f = g$ であり，$f \mapsto \widehat{f}$ は，E_m から $\widehat{E}_m$ への全単射．

補題 13. 上の設定の下で，以下が成り立つ；

1. $\{\widehat{E}_j\}_{j=0,1,2,\ldots}$ は，$\hom(D, D)$ の部分集合としての包含関係により狭義単調増加；

$$\widehat{E}_0 \subsetneq \hat{E}_1 \subsetneq \hat{E}_2 \subsetneq \cdots.$$

2. $\{\pi_j \circ \widehat{f} \mid f \in \widehat{E}_j\} = \{f \circ \pi_j \mid f \in E_j\}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$.

3. $\{\widehat{f}\circ\iota^j \mid f\in\widehat{E}_j\}=\{\iota^j\circ f\mid f\in E_j\},\ j=0,1,2,\ldots$.

［証明］

1. 任意の $f\in E_m$ に対して $\widehat{f}$ は，

$$\iota^m\circ f\circ\pi_m=\iota_{m+1}\circ(i_{m+1}\circ f\circ p_m)\circ\pi_{m+1}$$

と表され，$i_{m+1}\circ f\circ p_m\in E_{m+1}$ なので，$\widehat{E}_m\subset\hat{E}_{m+1}$.
$\iota^{m+1}\circ\mathrm{id}_{m+1}\circ\pi_{m+1}\in\widehat{E}_{m+1}$ が $\widehat{E}_m$ の要素ならば，等式

$$\begin{aligned}\iota^{m+1}\circ\mathrm{id}_{m+1}\circ\pi_{m+1}&=\iota^m\circ f\circ\pi_m\\&=\iota^{m+1}\circ(i_{m+1}\circ f\circ p_m)\circ\pi_{m+1}\end{aligned}$$

が成立させる $f\in E_m$ が存在し，ι^{m+1} は単射型，π_{m+1} は全射型であることにより，$\mathrm{id}_{m+1}=i_{m+1}\circ f\circ p_m$ となるはずだが，左辺の指数は $m+1$, 右辺の指数は m 以下なので，この等式は成立しない．したがって，$\widehat{E}_m\neq\widehat{E}_{m+1}$ であり，$\widehat{E}_m\subsetneq\widehat{E}_{m+1}$.

2. $\pi_j\circ\widehat{f}=\pi_j\circ(\iota^j\circ f\circ\pi_j)=f\circ\pi_j$.

3. $\widehat{f}\circ\iota^j=(\iota^j\circ f\circ\pi_j)\circ\iota^j=\iota^j\circ f$.

□

$f,g\in E_m$ に対して，

$$\begin{aligned}\widehat{f}\circ\widehat{g}&=(\iota^m\circ f\circ\pi_m)\circ(\iota^m\circ g\circ\pi_m)=\iota^m\circ(f\circ g)\circ\pi_m\\&=\widehat{f\circ g}.\end{aligned}$$

また，$\widehat{\mathrm{id}_m}=\iota^m\circ\pi_m$ は，E_m の単位元としての条件

$$\widehat{f}\circ\widehat{\mathrm{id}_m}=\widehat{f},\quad \widehat{\mathrm{id}_m}\circ\widehat{f}=\widehat{f}$$

を満たす．よって，$\widehat{E}_m$ は,（単位元を持つ）モノイドとして E_m と同型.

3.2.1.7　$\varphi\in\widehat{E}$ の標準形

$\widehat{E}=\bigcup_{j=0,1,\ldots}\widehat{E}_j$ と置く．$\varphi\in\widehat{E}$ に対して，その指数と標準形を定義する.

$\varphi\in\widehat{E}$ に対して，$\varphi\in\widehat{E}_m$ となる m と $\varphi=\widehat{f}$ となる $f\in E_m$ を選ぶと，この f は，つまり，$\widehat{f}=\iota^m\circ f\circ\pi_m$ となる $f\in E_m$ は，ι^m が単射型で π_m が全射型であることにより一意に決まる（ただし，m の選び方には依存する）．この f の指数を s とすると，

$$\begin{aligned}\iota^m\circ f\circ\pi_m&=\iota^m\circ(i^s_m\circ p^m_s)\circ\pi_m\\&=(\iota^m\circ i^s_m)\circ(p^m_s\circ\pi_m)\\&=\iota^s\circ\pi_s\end{aligned}$$

となる．この式変形を，m を任意の $n \geq s$ に書き換えて逆に辿ると，

$$\begin{aligned}\iota^s \circ \pi_s &= (\iota^n \circ i_n^s) \circ (p_s^n \circ \pi_n) \\ &= \iota^n \circ (i_n^s \circ p_s^n) \circ \pi_n\end{aligned}$$

となるので，$f' = i_n^s \circ p_s^n \in E_n$ と置くと，

$$\widehat{f'} = \iota^s \circ \pi_s = \widehat{f}$$

であることがわかる．つまり，$\varphi \in \widehat{E}$ に対して，

1. $\varphi = \iota^s \circ \pi_s$ となる $0 \leq s$ が存在し，
2. 任意の $n \geq s$ に対して，$\varphi = \widehat{f}$ となる指数が s の $f \in E_n$ が存在する．
3. $\varphi = \widehat{f}$ となる $f \in E_n$ は（n に対して）一意に決まり，f の指数は一意に決まるので，s は φ のみから一意に決まる．

この s を $\varphi \in \widehat{E}$ の指数と言い，$\iota^s \circ \pi_s$ を φ の標準形と言うことにする．

標準形を用いて表すと，

$$\begin{aligned}\widehat{E}_m &= \{\iota^j \circ \pi_j \mid j = 0, 1, 2, \ldots, m\} \\ \widehat{E} &= \{\iota^j \circ \pi_j \mid j = 0, 1, 2, \ldots\ldots\}\end{aligned}$$

となる．

Remark. $\iota^m \circ \pi_m = \widehat{\mathrm{id}_m}$ は $\widehat{E}_m$ の単位元（射の合成としては恒等射）となるが，$\hat{E}_{m+1}$ の単位元にはならない；
$\iota^{m+1} \circ \pi_m \in \widehat{E}_{m+1}$ に対して，

$$\begin{aligned}(\iota^{m+1} \circ \pi_{m+1}) \circ (\iota_m \circ \pi_m) &= \iota^{m+1} \circ i_{m+1}^m \circ \pi_m \\ &= \iota^m \circ \pi_m\end{aligned}$$

であり，id_m の指数は m. 一方，$\iota^{m+1} \circ \pi_{m+1}$ の指数は $m+1$ なので，

$$(\iota^{m+1} \circ \pi_{m+1}) \circ (\iota_m \circ \pi_m) \neq \iota^{m+1} \circ \pi_{m+1}$$

であり，$\iota_m \circ \pi_m$ は，E_{m+1} では単位元としての性質をもたない．

Remark. $\widehat{E}_m$ の要素 $\iota^s \circ \pi_s$, $s = 0, 1, \ldots, m$ は，標準形で考えればそれぞれ E_s のトップとなる要素（指数最大の要素）id_s と対応するが，m を固定した対応させるならば，E_m の要素 $i_m^s \circ p_s^m$ と対応する．また，埋め込み写像 $\widehat{E}_m \to \widehat{E}_{m+1}$ には，E_m から E_{m+1} への射 $\uparrow$: $E_m \longrightarrow E_{m+1}$: $i_m^s \circ p_s^m \mapsto i_{m+1}^s \circ p_s^{m+1}$ が対応する；

3.2.1.8 スケルトン $\mathcal{C}^{-1}$

スケルトンとなる単純列，及び，対象 D からの射の族 $\{\pi_j\}$ と D への射の族 $\{\iota^j\}$ が与えられ，等式

$$\pi_j \circ \iota^m = \begin{cases} p_j^m, & j \leq m \\ i_j^m, & j \geq m \end{cases}$$

を満たすとする（したがって，$\pi_m \circ \iota^m = \mathrm{id}_m$）．このとき，以下の条件を満たす圏 $\mathcal{C}^-$ をスケルトンと言うことにする．

1. $\mathcal{C}$ の対象は，D, $D_0, D_1, D_2, \cdots$ のみであり，
2. $\widehat{E} = \bigcup_{j=0,1,2,\ldots} \widehat{E}_j$ と置くと，
$$\hom(D, D) = \{\mathrm{id}_D\} \cup \widehat{E},$$
3. 各 $j = 0, 1, 2 \ldots$ に対して，
$$\hom(D, D_j) = \{f \circ \pi_j \mid f \in E_j\}$$
$$\hom(D_j, D) = \{\iota^j \circ f \mid f \in E_j\}$$

スケルトン $\mathcal{C}^-$ において，射の集合 H_0^0, H_0^1, H_1^0, H_1^1 を

$$H_0^0 = \bigcup_{j,k=0,1,\ldots} \hom(D_j, D_k)$$
$$H_0^1 = \bigcup_{j=0,1,\ldots} \hom(D, D_j), \quad H_1^0 = \bigcup_{j=0,1,\ldots} \hom(D_j, D)$$
$$H_1^1 = \hat{E}$$

と定め，その要素に対して標準形を定義する；

1. $f \in H_0^0$ については，$f = i_{m'}^s \circ p_s^m$ の形を標準形とする．
2. $f \in H_0^1$ は $f = f' \circ \pi_m$ と一意に表され，さらに，$f' = i_m^s \circ p_s^m$ と一意に表されるので，f は，
$$f = f' \circ \pi_m = i_m^s \circ (p_s^m \circ \pi_m) = i_m^s \circ \pi_s$$
と一意に表される．f' の指数 s を f の指数，$i_m^s \circ \pi_s$ を f の標準形と定める．

3. $f \in H_1^0$ は $f = \iota^m \circ f'$ と一意に表され，さらに，$f' = i_m^s \circ p_s^m$ と一意に表されるので，f は，

$$f = \iota^m \circ f' = (\iota^m \circ i_m^s) \circ p_s^m = \iota^s \circ p_s^m$$

と一意に表される．f' の指数 s を f の指数，$\iota^s \circ p_s^m$ を f の標準形と定める．

4. $\varphi \in H_0^0$ については，既に定義した通り，$\varphi = \iota^s \circ \pi_s$ の形を標準形，s を指数とする．

次の補題は，機械的に場合分けを徹底すれば，適切な中間点を選んで式を書き換えていく作業のみで証明できる．しかし，記述は長くなる．ここでは，補題 9 に頼って指数を追跡することにより証明する．また，場合分けを減らすために，以下の「小細工」を用いる；
$\pi_\rho \circ \iota^\sigma : D_\sigma \xrightarrow{\iota^\sigma} D \xrightarrow{\pi_\rho} D_\rho$ は，場合分けにより p-射，もしくは，i-射として

$$\pi_\rho \circ \iota^\sigma = \begin{cases} p_\rho^\sigma, & \rho \le \sigma \\ i_\rho^\sigma, & \sigma \le \rho \end{cases}$$

と表されるが，$s = \min\{\rho, \sigma\}$ と置いて

$$\pi_\rho \circ \iota^\sigma = i_\rho^s \circ p_s^\sigma$$

と表すこともできる．

補題 14. スケルトン $\mathcal{C}^-$ において，射の集合

$$H_0^0 \cup H_0^1 \cup H_1^0 \cup H_1^1$$

に属する射の合成 $f \circ g$ は，再びこの集合に属する．$f \circ g$ の指数は，f の指数 ρ と g の指数 σ の最小 $s = \min\{\rho, \sigma\}$ に等しい．

［証明］　場合分けをして証明するが，いずれの場合でも，式変形の最後の形から，$f \circ g$ の指数が $s = \min\{\rho, \sigma\}$ であることが読み取れる．

$f, g \in H_0^0$ の場合；　この場合は明らか．

$f \in H_0^0,\ g \in H_0^1$ の場合；　$D \xrightarrow{g} D_m \xrightarrow{f} D_{m'}$ とすると，g の標準形は $g = i_m^\sigma \circ \pi_\sigma$ であり，i_m^σ の指数は σ なので，$f \circ i_m^\sigma \in \hom(D_\sigma, D_{m'})$ の指数は s．したがって，

$$\begin{aligned} f \circ g &= (i_{m'}^s \circ p_s^\sigma) \circ \pi_\sigma = i_{m'}^s \circ (p_s^\sigma \circ \pi_\sigma) \\ &= i_{m'}^s \circ \pi_s \in H_0^1. \end{aligned}$$

$f \in H_1^0,\ g \in H_0^0$ の場合；　$D_m \xrightarrow{g} D_{m'} \xrightarrow{f} D$ とすると，f の標準形は $f = \iota^\rho \circ p_\rho^{m'}$ であり，$p_\rho^{m'}$ の指数は ρ なので，$p_\rho^{m'} \circ g$ の指数は s．したがって，

$$\begin{aligned} f \circ g &= \iota^\rho \circ (i_\rho^s \circ p_s^m) = (\iota^\rho \circ i_\rho^s) \circ p_s^m \\ &= \iota^s \circ p_s^m \in H_1^0. \end{aligned}$$

$f \in H_1^0,\ g \in H_0^1$ の場合；　$D \xrightarrow{g} D_m \xrightarrow{f} D$ とすると，f, g の標準形は

$$f = \iota^\rho \circ p_\rho^m, \quad g = i_m^\sigma \circ \pi_\sigma$$

であり，p_ρ^m の指数は ρ, i_m^σ の指数は σ なので，$p_\rho^m \circ i_m^\sigma$ の指数は s. したがって，

$$\begin{aligned} f \circ g &= \iota^\rho \circ (i_\rho^s \circ p_s^\sigma) \circ \pi_\sigma \\ &= (\iota^\rho \circ i_\rho^s) \circ (p_s^\sigma \circ \pi_\sigma) = \iota^s \circ \pi_s \in H_1^1. \end{aligned}$$

$f \in H_0^1,\ g \in H_1^0$ の場合；　$D_m \xrightarrow{g} D \xrightarrow{f} D_{m'}$ とすると，f, g の標準形は

$$f = i_{m'}^\rho \circ \pi_\rho, \quad g = \iota^\sigma \circ p_\sigma^m$$

であり，$i_{m'}^\rho$ の指数は ρ, $\pi_\rho \circ \iota^\sigma$ の指数は s, p_σ^m の指数は σ なので，$f \circ g$ の指数は s.

$f \in H_0^1,\ g \in H_1^1$ の場合；　$D \xrightarrow{f} D_m$ とすると，f, g の標準形は

$$f = i_m^\rho \circ \pi_\rho, \quad g = \iota^\sigma \circ \pi_\sigma$$

であり，i_m^ρ の指数は ρ, $\pi_\rho \circ \iota^\sigma$ の指数は s なので，$i_m^\rho \circ \pi_\rho \circ \iota^\sigma$ の指数は s. したがって，

$$\begin{aligned} f \circ g &= (i_m^s \circ p_s^\sigma) \circ \pi_\sigma = i_m^s \circ (p_s^\sigma \circ \pi_\sigma) \\ &= i_m^s \circ \pi_s \in H_0^1. \end{aligned}$$

$f \in H_1^1,\ g \in H_1^0$ の場合；　$D_m \xrightarrow{g} D$ とすると，f, g の標準形は

$$f = \iota^\rho \circ \pi_\rho, \quad g = \iota^\sigma \circ p_\sigma^m$$

であり，$\pi_\rho \circ \iota^\sigma$ の指数は s なので $\pi_\rho \circ \iota^\sigma = i_\rho^s \circ p_s^\sigma$. したがって，

$$\begin{aligned} f \circ g &= \iota^\rho \circ (i_\rho^s \circ p_s^\sigma) \circ p_\sigma^m = (\iota^\rho \circ i_\rho^s) \circ (p_s^\sigma \circ p_\sigma^m) \\ &= \iota^s \circ p_s^m \in H_1^0. \end{aligned}$$

$f \in H_1^1,\ g \in H_1^1$ の場合；　f, g の標準形は

$$f = \iota^\rho \circ \pi_\rho, \quad g = \iota^\sigma \circ \pi_\sigma$$

であり，$\pi_\rho \circ \iota^\sigma$ の指数は s なので $\pi_\rho \circ \iota^\sigma = i_\rho^s \circ p_s^\sigma$. したがって，

$$\begin{aligned} f \circ g &= \iota^\rho \circ (i_\rho^s \circ p_s^\sigma) \circ \pi_\sigma = (\iota^\rho \circ i_\rho^s) \circ (p_s^\sigma \circ \pi_\sigma) \\ &= \iota^s \circ \pi_s \in H_1^1. \end{aligned}$$

□

3.2.1.9　スケルトンの射影極限

命題 7. スケルトン $\mathcal{C}^{-1}$ において，$\langle D, \{\pi_j\}\rangle$ は射影列の射影極限．

［証明］

$\mathcal{C}^{-1}$ の対象 X と X から射影列への射の族 $\{g_j\}$ に対して，$g_j = \pi_j \circ g$ となる射 $g \in \hom(X, D)$ が存在することと，その一意性を示す．

$X = D_m$ の場合と，$X = D$ の場合を考えれば良い．

$X = D_m$ の場合． 補題 11 により，s を g_m の指数として，

$$g_j = \begin{cases} p_j^s \circ g_s, & 0 \leq j \leq s \\ i_j^s \circ g_s, & s \leq j \end{cases}$$

と表される．$g = \iota^s \circ g_s$ と置くと，

$$\pi_j \circ g = (\pi_j \circ \iota^s) \circ g_s = \begin{cases} p_j^s \circ g_s & 0 \leq j \leq s \\ i_j^s \circ g_s & s \leq j. \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} & D_m \arrow[dl, "g_s"'] \arrow[dr, "g_n"] & \\ D_s \arrow[rr, "i_n^s"'] & & D_n \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} & D_m \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "g_s"'] \arrow[drr, "g_n"] & D \arrow[dr, "\pi_n"] & \\ D_s \arrow[urr, "\iota^s"] \arrow[rrr, "i_n^s"'] & & & D_n \end{tikzcd}$$

$X = D$ の場合． $f_j = \pi_j$ とする．$g_j \in \hom(D, D_j)$ は，スケルトンの定義により

$$g_j = g_j' \circ \pi_j, \quad g_j' \in E_j$$

と表され，両辺に右側から ι^j を合成することにより g_j' が一意に決まることが分かる．したがって，$f_j = \pi_j$ として，補題 10 をいくらでも大きな m に対して用いることができ，

$$g_j = \begin{cases} p_j^s \circ g_s, & 0 \leq j \leq s \\ i_j^s \circ g_s, & s \leq j \end{cases}$$

となる．$f = \iota^s \circ g_s$ と置くと，$\pi_j \circ f = g_j,\ j = 0, 1, 2, \ldots$.

3.2.1.10　順序関係

ここまで，順序関係と独立な圏 $\mathcal{C}^-$ を考えてきた．**O1** 圏 $\mathcal{C}$ から順序関係を忘れた圏 $\mathcal{C}^-$ がスケルトンであり，かつ，$\mathcal{C}$ で $i_{m+1} \circ p_m \preceq \mathrm{id}_{m+1},\ m = 0, 1, 2, \ldots$ ならば，$\mathcal{C}$ での順序は

射影極限 D の恒等射 id_D を除いて

一意に決まることを確かめておく；

1. 仮定により，$i^j_{j+1} \circ p^{j+1}_j \preceq \mathrm{id}_{j+1}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ であり，したがって，$s+1 \leq m, m'$ ならば，**O1** 圏の条件により

$$\begin{aligned} i^s_{m'} \circ p^m_s &= i^{s+1}_{m'} \circ (i^s_{s+1} \circ p^{s+1}_s) \circ p^m_{s+1} \\ &\preceq i^{s+1}_{m'} \circ \mathrm{id}_{s+1} \circ p^m_{s+1} = i^{s+1}_{m'} \circ p^m_{s+1}. \end{aligned}$$

これを再帰的に繰り返すことにより，

$$s \leq \rho \leq m, m' \implies i^s_{m'} \circ p^m_s \preceq i^\rho_{m'} \circ p^m_\rho.$$

スケルトンであるという仮定により

$$\hom(D_m, D_{m'}) = \{ i^s_{m'} \circ p^m_s \mid s = 0, 1, 2, \ldots, \min\{m, m'\} \}$$

なので，$\hom(D_m, D_{m'})$ の順序は確定．

2. $f, g \in \hom(D, D_m)$ は $f', g' \in \hom(D_m, D_m)$ を用いて $f = f' \circ \pi_m$, $g = g' \circ \pi_m$ と一意に表されるので，f', g' の順序により確定．

3. $f, g \in \hom(D_m, D)$ は $f', g' \in \hom(D_m, D_m)$ を用いて $f = \iota^m \circ f'$, $g = \iota^m \circ g'$ と一意に表されるので，f', g' の順序により確定．

4. $f, g \in \widehat{E}_m$ は $f', g' \in \hom(D_m, D_m)$ を用いて $f = \iota^m \circ f' \circ \pi_m$, $g = \iota^m \circ g' \circ \pi_m$ と一意に表されるので，f', g' の順序により決まる．したがって，$\widehat{E}_m$ での順序は一意に確定．

5. $f \in \widehat{E}_m$, $g \in \widehat{E}_n$ の場合，一般性を失うことなしに $m \leq n$ と仮定すると，$f, g \in \widehat{E}_n$. したがって，$\widehat{E}$ の順序は一意に確定．

以上，$\mathcal{C}^{-1}$ がスケルトンであるという条件により，これらの集合での順序は $f', g' \in \hom(D_m, D_{m'})$ により決まり，$\hom(D_m, D_m)$ どの順序は指数の順序で決まるので，これらの集合での順序も指数の順序で決まる．$H^0_0 \cup H^1_0 \cup H^0_1 \cup H^1_1$ の射の合成は，これらの集合の要素となる射の合成であり，補題**??** により，合成した結果の指数は合成を構成する射の指数の最小値として定まるので，$H^0_0 \cup H^1_0 \cup H^0_1 \cup H^1_1$ の順序は，つまり，D の恒等射 id_D との順序以外以外のすべての順序が，完全に確定することが分かった．

逆に，$\mathcal{C}^-$ においての $H^0_0 \cup H^1_0 \cup H^0_1 \cup H^1_1$ に，順序関係を指数の順序により与えると，この順序は **O1** 圏の要求する条件

$$\begin{aligned} g_1 \preceq g_2 &\implies f \circ g_1 \preceq f \circ g_2 \\ f_1 \preceq f_2 &\implies f_1 \circ g \preceq f_2 \circ g \end{aligned}$$

を満たす．

しかし，$H_0^0 \cup H_0^1 \cup H_1^0 \cup H_1^1$ は写像の合成について閉じているので，**O1** 圏の条件が id_D との順序を強制することはない（id_D に対しては，指数を定義していない）．したがって，例えば id_D が $\hom(D, D)$ の他の要素すべてと比較不能としても，**O1** 圏の条件には違反しない．

その場合，$f_j = \pi_j,\ g_j = i_j^0 \circ \pi_0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，

$$f_j = \pi_j \circ \mathrm{id}_D, \quad g_j = \pi_j \circ (\iota^0 \circ \pi_0), \quad g_j \preceq f_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

となるが，f と g は比較不能．

結論：　**O1** 圏では，射影極限が不等式についての簡約性を持つとは限らない．

3.2.2　対象が poset の場合

対象が poset の場合は，その射の集合がスケルトンとしての条件を満たすことを確かめれば，ここまでの結果を用いることができる．しかし，実際には，直接に導いた方がイメージを把握しやすい．

ここでは，$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ とする（0 は含めない）．$\mathcal{P} = \mathrm{Map}(\mathbb{N}, \{0, 1\})$ と置く．

Remark.　$\{0, 1\}$ への写像とする必然性はなく，$\{0, 2\}$ への写像としても良い．$\mathcal{P} = \mathrm{Map}(\mathbb{N}, \{0, 2\})$ とした場合には，$a \in \mathcal{P}$ に対して，a から決まる部分集合

$$\{j \mid a(j) = 2\}$$

を考えることになる．$\mathcal{P} = \mathrm{Map}(\mathbb{N}, \{0, 1\})$ としておけば，$a \in \mathcal{P}$ は $\{j \mid a(j) = 1\}$ の特性関数．

3.2.2.1　Cut と Cut^+

$n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，${}_n\mathrm{Cut} \in \mathrm{Map}(\mathcal{P}, \mathcal{P})$ を，$a \in \mathcal{P}$, $j \in \mathbb{N}$ に対して

$$({}_n\mathrm{Cut}(a))(j) = \begin{cases} a(j), & j \leq n \\ 0, & j > n \end{cases}$$

と定め，

$$Cut = \{{}_0\mathrm{Cut}, {}_1\mathrm{Cut}, {}_2\mathrm{Cut}, \ldots\}, \quad Cut^+ = Cut \cup \{\mathrm{id}_{\mathcal{P}}\}$$

と置く．

$\mathcal{P}$ を，$\mathbb{N}$ の部分集合すべての集合（$\mathbb{N}$ のべき集合）とみることもできる．この場合，${}_n\mathrm{Cut}$ は n より大きな要素を取り除く操作を表す（${}_0\mathrm{Cut}$ は，すべての要素を取り除き空集合に変える）．したがって，Cut に属する関数による像は，有限集合となる（空集合も有限集合と考える）．

$f, g \in Cut^+$ のどちらか一方でも Cut に属するならば，$f \circ g$ も Cut に属する．

例 3. 対象は $\mathcal{P}$ のみ，$\mathrm{hom}(\mathcal{P}, \mathcal{P}) = Cut^+$ である圏 $\mathcal{C}$ を考える．

1. ${}_m\mathrm{Cut}, {}_n\mathrm{Cut} \in \mathrm{hom}(\mathcal{P}, \mathcal{P}) = Cut^+$ の順序が

$${}_m\mathrm{Cut} \preceq {}_n\mathrm{Cut} \iff m \leq n, \quad {}_m\mathrm{Cut} \preceq \mathrm{id}_{\mathrm{P}}$$

と与えられているならば，圏 $\mathcal{C}$ は **O1** 圏となる．

2. $f, g \in Cut$ の順序は各点の順序

$$ {}_m\mathrm{Cut} \preceq {}_n\mathrm{Cut} \iff m \leq n $$

だが，$\mathrm{id}_{\mathcal{P}}$ は Cut の要素のいずれとも比較不能であるとして $\hom(\mathcal{P}, \mathcal{P})$ に順序関係を定めてみる．この場合にも，圏 $\mathcal{C}$ は **O1** 圏となる．

［証明］　1. は明らか．2. では，$\mathrm{id}_{\mathcal{P}}$ が Cut の上界となることが，Cut の順序から導かれるかが問題になる．しかし，Cut の順序関係から $\mathrm{id}_{\mathcal{P}}$ との順序を導こうとして，例えば

$$ g_1 \preceq g_2 \implies f \circ g_1 \preceq f \circ g_2 $$

を用いようとしても，そのためには

- $g_1, g_2 \in Cut$ であり，
- $f \circ g_1$, $f \circ g_2$ のどちらかは $\mathrm{id}_{\mathcal{P}}$

となるように設定する必要があるが，これは不可能．したがって，$\mathcal{C}$ は **O1** 圏としての条件を満たす． □

つまり，Cut の順序関係が $\mathrm{id}_{\mathcal{P}}$ の順序を強制することはない．

3.2.2.2　射影列

以下，単純列を定義する．D_n は，実質的には $\{0, 1, \ldots, n\}$ のべき集合に過ぎず，有限の世界に収まっている．しかし，D は非可算個の要素を持ち，無限の世界に属する．

$n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，$D_n = {}_n\mathrm{Cut}(\mathcal{P})$ と定める；

$$ D_n = \{a \in \mathcal{P} \mid a(j) = 0,\ j = n+1, n+2, \ldots\}. $$

また，$D = \mathcal{P}$ と置く．${}_k\mathrm{Cut}$ の domain や codomain の一方，もしくは，両方を $D_0, D_1, D_2, \ldots$ に制限したものも，${}_k\mathrm{Cut}$ と表しても良いことにする．正確に表したい場合には，それぞれ，

- ${}_k\mathrm{Cut} : D \longrightarrow D_n$ は ${}_k\mathrm{Cut}_n$,
- ${}_k\mathrm{Cut} : D_m \longrightarrow D$ は ${}_k\mathrm{Cut}^m$,
- ${}_k\mathrm{Cut} : D_m \longrightarrow D_n$ は ${}_k\mathrm{Cut}_n^m$

と表すことにする．

例 4. $pr_n : D_{n+1} \longrightarrow D_n$, $in_{n+1} : D_n \longrightarrow D_{n+1}$ を，

$$pr_n = {}_n\mathrm{Cut}_n^{n+1}, \quad in_{n+1} = {}_n\mathrm{Cut}_{n+1}^n$$

と定め，射影列

$$D_0 \xleftarrow{pr_0} D_1 \xleftarrow{pr_1} \cdots \xleftarrow{pr_{n-1}} D_n \xleftarrow{pr_n} D_{n+1} \xleftarrow{pr_{n+1}} \cdots$$

と帰納列

$$D_0 \xrightarrow[in_1]{} D_1 \xrightarrow[in_2]{} \cdots \xrightarrow[in_n]{} D_n \xrightarrow[in_{n+1}]{} D_{n+1} \xrightarrow[in_{n+2}]{} \cdots$$

を考える．また，$\pi_m = {}_m\mathrm{Cut}_m$, $\iota^m = {}_m\mathrm{Cut}^m$ と定める．このとき，これらの射の合成は ${}_k\mathrm{Cut}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ の形であり，

1. 対象は D, D_0, D_1, $D_2, \ldots$ のみ.
2. 射は，${}_k\mathrm{Cut}$ の形の射と，D での恒等射 id_D.

として圏を定めると，D はこの圏の射影極限になる．

例 4 の結論はスケルトンとしての一般論から導くことができるが，むしろ，直感的に考えた方が納得できると思う．

例 4 の場合にも，Cut の順序は各点の順序に限定されるが，Cut^+ の順序は，$\mathrm{id}_{\mathcal{P}}$ との順序が強制されないので，一意には決まらない．したがって，$\mathrm{id}_{\mathcal{P}}$ は他の要素と比較不能として $\hom(D, D)$ の順序を定めることも可能．この順序を設定して D から射影列への射 f_j, g_j を

$$f_j = {}_0\mathrm{Cut}_j, \quad g_j = \pi_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

と定めると，

1. $f_j \preceq g_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots.$
2. $f = {}_0\mathrm{Cut} \in \hom(D, D)$, $g = \mathrm{id}_D \in \hom(D, D)$ とおくと，

   $$\pi \circ f = f_j, \quad \pi \circ g = g_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

   となるが，
3. f と g は比較不能

であり，射影極限 D は不等式についての簡約性を満たさない．

例 5. $a_1, a_2, \ldots \in \mathrm{Map}(\mathbb{N}, \{0,1\})$ を

$$a_n(j) = \begin{cases} 1, & j \leq n \\ 0, & j > n \end{cases}$$

と定め，また，a_0, a_∞ を

$$a_0(j) = 0, \quad a_\infty(j) = 1,\ j = 1, 2, 3, \ldots$$

と定め，

$$D = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_\infty\}$$

と置く．つまり，$n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して a_n は，左から n 個 1 が並び後は 0 が続く列であり，a_0 はすべて 0, a_∞ はすべて 1 の列，というイメージ．

この D は $\mathcal{P}$ の部分集合であり，${}_n\mathrm{Cut}$ を D の要素に作用させた値は D の要素となるので，${}_n\mathrm{Cut} \in \mathrm{Map}(D, D)$ とみなすことができる．この場合にも，$D_0, D_1, D_2, \ldots,$ を定めて射影列，帰納列を定義して，同じ議論を繰り返すことができる．

ここまで，$\mathcal{P}$ の順序は部分集合としての包含関係としてきたが，この順序は Cut の形の射の順序を定めるためにしか用いていない．したがって，

1. ${}_k\mathrm{Cut}$ が順序を保つ（$a \preceq b \implies {}_k\mathrm{Cut}(a) \preceq {}_k\mathrm{Cut}(b)$）．
2. $j \leq k \implies {}_j\mathrm{Cut} \leq {}_k\mathrm{Cut}$.

を満たす順序ならば，他の順序を用いることが可能．

1. 左から辞書式の順序でも良い．
2. $\mathcal{P}$ は $\mathrm{Map}(\mathbb{N}, \{0,2\})$ として，$a \in \mathcal{P}$ に対して，

   $$r(a) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{a(j)}{3}\right)^j$$

   と置いて，$a, b \in \mathcal{P}$ の順序を

   $$a \preceq b \iff r(a) \leq r(b)$$

   と定めても良い（辞書式順序と同じことになる）．
3. $\mathcal{P}$ は $\mathrm{Map}(\mathbb{N}, \{0,1\})$ として，$a \in \mathcal{P}$ に対して，

   $$s(a) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{a(j)}{2}\right)^j$$

と置いて，$a, b \in \mathcal{P}$ の順序を

$$a \preceq b \iff s(a) \leq s(b)$$

と定めてみる．この順序は，$a \in \mathcal{P}$ を実数の 2 進法による小数表示

$$a = 0.a(1)a(2)a(3)\cdots$$

と考えた場合の順序になる …… と言いたいところだが，

$$a = 0.10000\cdots, \quad b = 0.01111\ldots$$

に対して，$s(a) = s(b)$ であり（ poset としての条件を満たさず），同値関係による剰余を導入して $a = b$ と解釈すると，

$$_1\mathrm{Cut}(a) = 0.1000\cdots, \quad {}_1\mathrm{Cut}(b) = 0.0000\cdots$$

であり，$a \leq b$ だが $a \not\preceq n$ ということになり，$_1\mathrm{Cut}$ は単調ではなくなってしまう．

つまり，$\mathcal{P}$ は実数として解釈することはできないが，Cantor 集合として解釈することは可能ということ．

3.3 O2 圏．　poset の場合について

3.3.0.1 O2 の定義

圏の対象がすべて poset の場合，つまり，各対象がすべて集合であり順序が定義されている場合，に戻って考えても，**O2** 圏の条件は，かなり強い条件となっている．圏 $\mathcal{C}$ が次の条件を満たすとしてみよう；

1. $\mathcal{C}$ の対象はすべて poset であり，射はすべて写像となっている．
2. $\mathcal{C}$ の対象として唯ひとつの要素のみを持つ poset（そのひとつを $\{\alpha\}$ とする）が存在し，そこから $\mathcal{C}$ の任意の対象 A への写像はすべて射となる（$a \in A$ に対して，$\varphi(\alpha) = a$ となる射 $\varphi \in \hom(\{\alpha\}, A)$ を記号 h_a で表すことにする）．
3. $h_{a_1} \preceq h_{a_2} \iff a_1 \preceq a_2$.

このとき，

1. A の任意の 2 つの要素 $a_1 \preceq a_2$ に対して，$h_{a_1} \preceq h_{a_2}$ であり，$g \in \hom(A, B)$ に対して，条件 1.(a) により $g \circ h_{a_1} \preceq g \circ h_{a_2}$. したがって，$g(a_1) \preceq g(a_2)$ であり，g は単調．

2. $f_1 \preceq f_2$, $f_1, f_2 \in \hom(A, B)$ であるとする．任意の $a \in A$ に対して，条件 1.(b) により $f_1 \circ h_a \preceq f_2 \circ h_a$ となるので，$f_1(a) \preceq f_2(a)$. $a \in A$ は任意なので

$$f_1 \preceq f_2 \implies f_1(a) \preceq f_2(a) \ \ (\forall a \in A).$$

3. $f_0, f_1, f_2, \ldots \in \hom(A, B)$ は単調列であり，$a \in A$ が与えられているとして，$\hat{f}_j = f_j \circ h_a$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ と定める．

   - 任意の $m = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，$g_j \in \hom(\{\alpha\}, B)$ を

     $$g_j = \begin{cases} \hat{f}_j & j = 0, 1, 2, \ldots, m \\ \hat{f}_m & j = m, m+1, \ldots \end{cases}$$

     と定めると，$g_j \preceq \hat{f}_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ であり，2.(b) により

     $$\lim_{n \to \infty} g_n \preceq \lim_{n \to \infty} \hat{f}_n.$$

     2.(c) により $\lim_{n \to \infty} g_j = \hat{f}_m$ なので，

     $$\hat{f}_m \preceq \lim_{n \to \infty} \hat{f}_n.$$

     2.(a) (ii) により，

     $$\lim_{n \to \infty} \hat{f}_n = \left(\lim_{n \to \infty} f_n\right) \circ h_a$$

     なので，

     $$\hat{f}_m \preceq \left(\lim_{n \to \infty} f_n\right) \circ h_a$$

     であり，したがって，

     $$f_m(a) \preceq \left(\lim_{n \to \infty} f_n\right)(a).$$

     m は任意なので，$(\lim_{n \to \infty} f_n)(a)$ は $f_0(a), f_1(a), f_2(a), \ldots$ の上界．

   - $b \in B$ は $f_0(a), f_1(a), f_2(a), \ldots$ の上界であるとする．このとき，$g_j(\alpha) = b$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ として $g_j \in \hom(\{\alpha\}, B)$ を定めると，同じく 2.(b), 2.(c), 2.(a) (ii) により，$(\lim_{n \to \infty} f_n)(a) \preceq b$.

   以上により，各 $a \in A$ に対して，$(\lim_{n \to \infty} f_n)(a)$ は，$f_0(a), f_1(a), f_2(a), \ldots$ の B における上限であることがわかる．

4. $g \in \hom(A, B)$ と A での単調列 $a_0 \preceq a_1 \preceq a_2 \preceq \ldots$ が与えられているとする．$f_j = h_{a_j}$ として $f_j \in \hom(\{\alpha\}, A)$ を定めると，$f_0 \preceq f_1 \preceq f_2 \preceq \cdots$ であり，

(a) 1.(a) により $g \circ f_j$ は単調列なので，$\lim_{n\to\infty}(g \circ f_j)$ が定まる．

(b) 2.(a) により

$$\lim_{n\to\infty}(g \circ f_j) = g \circ \lim_{n\to\infty} f_j.$$

(c) したがって，

$$\lim_{n\to\infty} g(a_j) = g\left(\lim_{n\to\infty} a_j\right).$$

3.3.0.2 $\hom(D, D)$ の作用について

純粋に圏論での射として考えるならば，射 $f \in \hom(D, D)$ は「単なる矢印」なのだが，対象が poset で射が写像の場合には，写像が対象の要素に作用した値を考えることができる．特に D が射影列の「集合論的射影極限」の場合について，写像としての作用を調べてみよう．

D は Retraction の射影列

$$D_0 \xleftarrow{pr_0} D_1 \xleftarrow{pr_1} D_2 \xleftarrow{pr_2} \cdots$$

の射影極限であり，$\hom(D, D)$ は Retraction の射影列

$$E_0 \xleftarrow{pr_0^F} D_1 \xleftarrow{pr_1^F} D_2 \xleftarrow{pr_2^F} \cdots$$

の射影極限であるとする．$f \in \hom(D, D)$ と $x \in D$ に対して，

1. $\lim_{n\to\infty}(\iota_n \circ \pi_n)(x) = \mathrm{id}_n$ なので，

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\lim_{n\to\infty}(\iota_n \circ \pi_n)(x)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(f((\iota_n \circ \pi_n)(x))\right) \end{aligned}$$

であり，

2. $\lim_{m\to\infty}(\iota_m^F \circ \pi_m^F) = \mathrm{id}_E$ なので，

$$\begin{aligned} f((\iota_n \circ \pi_n)(x)) &= \left(\lim_{m\to\infty}((\iota_m^F \circ \pi_m^F)(f)\right)((\iota_n \circ \pi_n))(x)) \\ &= \lim_{m\to\infty}\big(((\iota_m^F \circ \pi_m^F)(f))((\iota_n \circ \pi_n))(x)\big) \end{aligned}$$

なので，

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\big(((\iota_m^F \circ \pi_m^F)(f))((\iota_n \circ \pi_n))(x)\big) \\ &= \lim_{n\to\infty}\big(((\iota_n^F \circ \pi_n^F)(f))((\iota_n \circ \pi_n))(x)\big) \end{aligned}$$

となる．したがって，$\pi_n(x) = x_n$，$\pi_n^F(f) = f_n$ と置くと，

$$\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{n\to\infty} \big(((\iota_n^F(f_n))(\iota_n(x_n))\big) \\
&= \lim_{n\to\infty} ((\iota_n \circ f_n \circ \pi_n)(\iota_n(x_n))) \\
&= \lim_{n\to\infty} ((\iota_n \circ f_n \circ (\pi_n \circ \iota_n))(x_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty} (\iota_n(f_n(x_n)))
\end{aligned}$$

となる．つまり，$f(x)$ は各 D_n において $f_n(x_n)$ を計算した値を ι_n で D に埋め込んだものの極限となる．

3.4 Cantor Set

3.4.1 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ の辞書式順序

ここでは，$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ とする．

3.4.1.1 Cantor set

$X = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ に対して，包含関係による順序 $\sqsubset$ とは別の順序を定め，区間 $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ 上の Cantor set と同一視してみる；

$x \in X = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ に対して，$\bar{x} : \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1\}$ は x の特性関数

$$\bar{x}(n) = \begin{cases} 1, & n \in x \\ 0, & n \notin x \end{cases}$$

を表すとする．

X には，$x, y \in X$ に対して，

1. $x = y$ ならば，$x \trianglelefteq y$.
2. $x \neq y$ ならば，$\bar{x}(j) \neq \bar{y}(j)$ となる最小の j を n として，
   - $\bar{x}(n) < \bar{y}(n)$ ならば，$x \trianglelefteq y$,
   - $\bar{y}(n) < \bar{x}(n)$ ならば，$y \trianglelefteq x$

として定めた順序（辞書式順序）が与えられているとする．

これは，$x, y \in X$ に対して，

$$x \trianglelefteq x' \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2 \left(\frac{\bar{x}(n)}{3} \right)^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2 \left(\frac{\bar{y}(n)}{3} \right)^n$$

と定めた順序でもあり，Cantor set としての X の順序，つまり，

1. $[0, 1]$ 上の標準的 cantor set を，3 進数での小数表示し，
2. 記号 2 を 1 に書き換えた表示

と解釈しての（普通の実数の大小としての）順序と一致する．

第4章　Appedix Z. Appendix の Appendix

4.1　補足

4.1.0.1

(**??**) 式右辺の形では

$$s \in \bigcup_{j \in J} a_j \iff \exists j \in J : s \in a_j$$

となる．(**??**) 式の形の "$\exists a \in A$" より，添え字についての "$\exists j \in J$ の方が，なにかと扱いやすい．

(**??**) 式での A は集合族ではなく単なる集合の集合なのだが，この場合，添え集合 J として A を選び, $a_j = j,\ j \in J$ と定めた集合族 $\{a_j\}_{j \in A}$ を考える．$\{a_j\}_{j \in A} = \{a\}_{a \in A}$ と書き直せるので，

$$\bigcup A = \bigcup_{a \in A} a.$$

4.1.0.2

1. $a \in A$ が与えられたとする．
   (a) $s \in a$ が与えられたとする．
   (b) $\bigcup A$ の定義 $\bigcup A = \{s \in S \mid \exists a \in A : s \in a\ \}$ の a としてこの a を選ぶことにより，
   (c) $s \in \bigcup A$.

   よって，$a \sqsubset \bigcup A$.
2. 任意の $a \in A$ に対して $a \sqsubset b$ であるとする．
   (a) $s \in \bigcup A$ が与えられたとする．
   (b) $\bigcup A$ の定義により，$s \in a$ となる $a \in A$ が存在する．
   (c) したがって，$s \in b$.

   よって，$\bigcup A \sqsubset b$.

詳細に書けば書くほど，分かりづらくなる．特に

$$\{s \in S \mid \exists a \in A : s \in a\,\} \text{ の } a \text{ としてこの } a \text{ を選ぶ}$$

はひどい表現なのだが，この点については ⇒ Appendix 4.2.0.1

4.1.0.3

この証明を (**??**) 式の形の定義に戻って書くと，うんざりするほど長くなる；

$$\begin{aligned}
t \in \bigcup f(A) &\iff \exists b \in Y : (b \in f(A)) \wedge (t \in b) && (\Leftarrow \text{(??) 式の形の定義}) \\
&\iff \exists b \in Y : \big(\exists a \in A : b = f(a)\big) \wedge (t \in b) && (\Leftarrow \text{像 } f(A) \text{ の定義}) \\
&\iff \exists b \in Y : \big(\exists a \in A : (b = f(a) \wedge (t \in b)\big) \\
&\iff \exists a \in A : \big(\exists b \in Y : (b = f(a) \wedge (t \in b)\big) \\
&\iff \exists a \in A : t \in f(a) \\
&\iff t \in \bigcup \{f(a) \mid a \in A\,\}
\end{aligned}$$

うんざりするほど長くなる理由は，和集合の定義と，像 $f(a)$ の定義の 2 箇所で「存在する」を用いていることが原因．$f : X \longrightarrow Y$ による A の像の定義

$$f(A) = \{b \in Y \mid \exists a \in A : b = f(a)\,\}$$

は，a を添え字とする $f(a)$ という発想で

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\,\}$$

とすれば，∃ を使わないで済む．そのためには，最初に和集合をとる段階で，a を添え字とする $f(a)$ に切り替えて，

$$\bigcup f(A) \iff \bigcup_{a \in A} f(a)$$

と書き換えれば良い；

$$t \in \bigcup f(A) = \exists a \in A : t \in f(a)\,.$$

4.1.0.4

$a \in X_0$ と $t \in T$ の順序対を $\langle a, t\rangle$ を $\langle a|t$ と表しても良いことにする；

$$\langle a|t = \langle a, t\rangle.$$

$\langle a|t$ は，t に関数 $\langle a|$ が作用した値と考える．

$Y = \mathcal{P}T$, $b \in \mathcal{P}(Y)$ に対しても，$\langle a|b = \langle a, b\rangle$ なのだが，$\langle a|b$ は，$b \subset Y$ と考えれば，関数 $\langle a| : Y \longrightarrow X_0 \times Y$ による $b \subset Y$ の像と解釈することもできる．この場合，

$$\langle a|b = \{\langle a, t\rangle \mid t \in b\} \tag{4.1}$$

という等式が成立する．一方，等式

$$\langle a, b\rangle = \{\langle a, t\rangle \mid t \in b\}$$

が成立すると主張することは，かなり無理がある．

$\langle a|$ を f と置いてみると等式 (4.1) を主張する根拠は

- $f(b)$ は，$f : Y \longrightarrow \mathcal{P}(X_0 \times T)$ と解釈すれば，f による b の値
- $f(b)$ は，$f : Y \longrightarrow X_0 \times T$ と解釈すれば，f による b の像

という 2 重解釈が認められているためであり，あまり威張れたものではない．したがって，$\langle a|b$ を以下なり (4.1) 式で定義して，他の使い方は控えることにした．

4.1.0.5

断面を $\langle a, \mathrm{scan}_c(a)\rangle$ と表したくなるのだが，これは，記号の使い方として好ましくない．
例えば，$X_0 = \{0.1\}$, $T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ で $c = \{\langle 0, 3\rangle, \langle 0, 6\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 1, 6\rangle\}$ の場合，

$$\mathrm{scan}_c(0) = \{3, 6\},\ \mathrm{scan}_c(1) = \{2, 4, 6\}$$

であり，

- 0 での断面は $\{\langle 0, 3\rangle, \langle 0, 6\rangle\}$,
- 1 での断面は $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 1, 6\rangle\}$,
- $c = \{\langle 0, 3\rangle, \langle 0, 6\rangle\} \cup \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 1, 6\rangle\}$

となる．一方，

$$\langle 0, \mathrm{scan}_c 0\rangle = \langle 0, \{3, 6\}\rangle, \quad \langle 1, \mathrm{scan}_c 1\rangle = \langle 1, \{2, 4, 6\}\rangle.$$

であり，

$$c = \langle 0, \{3, 6\}\rangle \cup \langle 1, \{2, 4, 6\}\rangle$$

と解釈するのは無理.

そのため，やむを得ず

$$\{\langle a, t\rangle \mid t \in \mathrm{scan}_c(a)\}$$

という，少し回りくどい表現を選んだ．すっきりした表現をしたいならば，

$a \in X_0$ と $b \subset Y$ に対して，

$$\langle a|b = \{\langle a, t\rangle \mid t \in b\}$$

と定めて，新しい記号 $\langle a|b$ を導入しておけば，

$$c = \bigcup_{a \in X_0} \langle a| \,\mathrm{slit}_c(a)$$

と表すことができる．$\langle a|b$ は，

1. $\mathrm{slit}_c(a) \in b$ を “unpack” してから
2. a とのペアを作り，
3. もう一度 “pack” して，$a \in X_0$ を添え字とする集合族を作る

という発想.

4.2 背景と混乱

4.2.0.1

これは，$\exists a \in A : s \in a$ における記号 a はこの文の中だけで意味をもつ「局所的記号」であり，

s を要素として持ち A の要素となるものが存在する

の「となるもの」に「ここだけの記号 a」を使っているに過ぎない．したがって,「この a として a を選ぶ」を避けたいならば，

$$\exists a' \in A : s \in a'$$

と書き換えておいてから，a' としてこの a を選べば良い．この書き換えは，いわゆる「α-変換」と同じこと（ただし，α-変換は記号列の世界での書き換えであり，意味が同じだから書き換えても良い，とはいかないので，α-変換という立派な名前がついている）．

Remark. 壮大な無駄話をしているようだが，数学の世界の証明は，

> 常に意味を追っているのであり，記号の使い方，特に記号のスコープについては，恐ろしいほどルーズ

であることは，心得ておくべき．

4.2.0.2 像と値

括弧ではなく関数の記号を

$${}^{\uparrow}f^{\downarrow}(a)$$

と変えてしまうのも，1 つの考え方だと思う．つまり，

1. 引数として受け取った集合 a（というひとつのもの）を “unpack” してばらばらの要素にし，
2. それらのひとつひとつに f を作用させ，
3. 結果として得た値（というばらばらの要素たち）を “pack” して集合（というひとつのもの）にまとめる

というイメージ．

4.2.0.3

D に Scott 位相を導入して位相空間とすることもできるので，位相空間論でのコンパクトとの関係が気になる．もちろん，D の部分集合に対してではなく D の要素に対してコンパクトを定義しているのだから，位相空間論でのコンパクトと一致するわけはないが，D が特に $\mathcal{P}(S)$ のときには，次のように言い換えると，かなり類似性が見えてくる；

> d は S の部分集合とする．A が S の部分集合から成る任意の有向集合であって d の被覆ならば（$d \subset \bigcup A$ ならば），d は A に属する有限個の $a_1, a_2, \ldots, a_k$ のみで覆われている（$d \subset a_1 \cup a_2 \cup \cdots \cup a_k$ となっている）．

さらに，$d \subset a_1 \cup a_2 \cup \cdots \cup a_k$ ならば A が有向であることにより $d \subset a$ となる $a \in A$ が存在するので（$k = 1$ としてしまって良いので），かなり似た定義となる．ただし，

- 位相空間論でのコンパクトは，a が開集合であることを要求しているが，
- poset としてのコンパクトは，A が有向というだけで個々の $a \in A$ についての条件は課していない

という相違は残る．どちらも

d の被覆 A は有限部分被覆を持つ

ということなのだが，違いをまとめると，以下のようになる；

	位相空間 $(X, \mathcal{O})$	poset $(X, \preceq)$
A が d の被覆	$d \subset \bigcup A$	$d \preceq \sup A$
被覆の条件	A は開被覆，つまり，$a \in A$ はすべて開集合	A は有向
有限部分被覆	$d \subset a_1 \cup \cdots \cup a_n$ となる $a_1, \ldots, a_n \in A$ が存在	$d \preceq a$ となる $a \in A$ が存在

	位相空間 $(X, \mathcal{O})$	poset $(\mathcal{P}(S), \subset)$
A が d の被覆	$d \subset \bigcup A$	$d \subset \bigcup A$
被覆の条件	A は開被覆，つまり，$a \in A$ はすべて開集合	A は有向
有限部分被覆	$d \subset a_1 \cup \cdots \cup a_n$ となる $a_1, \ldots, a_n \in A$ が存在	$d \subset a$ となる $a \in A$ が存在